Annales Mathematicae Silesianae 15 (2001)

Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 1999, Katowice

# SUR LES LOIS DE SORTIE DES SEMI-GROUPES DE CONVOLUTION

IMED BACHAR

**Abstract.** Let $\mu = (\mu_t)_{t>0}$ be a convolution semigroup on $\mathbb{R}^d$. An exit law for $\mu$ is a positive measurable function $\varphi$ :$]0,\infty[\times\mathbb{R}^d \mapsto [0,\infty]$ which verifies the functional equation (by putting $\varphi_t := \varphi(t,.)$)

$$\forall s,t > 0 : \mu_s * \varphi_t = \varphi_{s+t}\ \lambda.a.e.$$

where $\lambda$ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^d$. Following [1], we prove in this paper that the solutions of this equation are on the form

$$\varphi_t = \frac{d(\hat{\mu}_t * \beta)}{d\lambda}\ \lambda.a.e.$$

where $\hat{\mu} := (\hat{\mu}_t)_{t>0}$ is the reflected convolution semigroup of $\mu, \beta$ is a positive measure on $\mathbb{R}^d$ such that $(\hat{\mu}_t * \beta) << \lambda$, for evry $t > 0$.

Moreover, we study the global solutions and their interpretations in terms of the negative definite function associated to $\mu$.

## 0. Introduction

Pour tout $t > 0$, soient $g_t := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\|\cdot\|^2}{4t}\right)$ la fonction de Gauss sur $\mathbb{R}^d$ et $\mu_t := g_t.\lambda$ la mesure de densité $g_t$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$. Il est connu que $\mu := (\mu_t)_{t>0}$ est un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$ et la fonction $(t,x) \mapsto g(t,x) := g_t(x)$ est solution de l'équation fonctionnelle (de Chapmann–Kolmogorov)

$$\forall s,t > 0 : \mu_s * \varphi_t = \varphi_{s+t}\ \lambda.p.p.$$

*Received: 24.06.2000. Revised: 27.06.2001.*

AMS (1991) subject classification: Primary 39B52, 47D07, 43A35.

*Key words and phrases:* convolution semigroup, exit law equation.

Cette équation s'interprète en théorie probabiliste du potentiel comme *loi de sortie* du processus de Markov associé à $\mu$ et elle a fait l'objet de plusieurs travaux [1,4,5,6,7]. L'objet de cet article est l'étude de l'équation des lois de sortie pour des semi-groupes de convolution quelconques; il fait donc siute à [1]. D'ailleurs certains résultats intermédiares sont adaptés de cette référence. Le premier paragraphe est consacré à des généralités sur les semi-groupes de convolution $\mu := (\mu_t)_{t>0}$ sur $\mathbb{R}^d$. Sous une hypothèse de finitude, on montre dans le second paragraphe que $\varphi = (\varphi_t)_{t>0}$ est une loi de sortie de $\mu$ si et seulement si il existe une unique mesure positive $\sigma$-finie $\beta$ vérifiant $(\hat{\mu}_t * \beta) << \lambda$ pour tout $t > 0$ tel que

$$\forall t > 0 : \varphi_t = \frac{d(\hat{\mu}_t * \beta)}{d\lambda} \; \lambda.p.p.$$

Puis on étudie d'une manière globale, les cas extrêmes $\mu_t << \lambda$ (resp. $\mu_t \perp \lambda$) pour tout $t > 0$. Aussi, on exprime des conditions suffisantes à l'aide de la fonction définie négative associée à $\mu$.

## 1. Généralités

### 1.1. Notations

Sur $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$, on note par $\mathcal{B}$ la tribu borélienne, par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$ et par $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ qui sont continues à support compact. Soit $\mathcal{M}$ le cône des mesures positives de Borel sur $\mathbb{R}^d$ et soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On note par $L^1_{loc}$ l'espace de fonctions localement $\lambda$-intégrables. On note aussi par $\varepsilon_a$ la mesure de Dirac au point $a \in \mathbb{R}^d$. Une propriété a lieu $\lambda.p.p.$ si elle est vérifiée sauf sur un ensemble $\lambda$-négligeable. Pour $x \in \mathbb{R}^d, f \in \mathcal{K}$ et $\eta, \beta \in \mathcal{M}$, on note par $\check{f}(x) = f(-x), \eta(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\eta(x)$, par $\hat{\eta}(f) := \eta(\check{f})$ et par

$$\eta * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) d\eta(y)$$

$$(\eta * \beta)(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) d\eta(x) d\beta(y).$$

D'autre part, on utilise la notation $\eta << \beta$ (resp. $\eta \perp \beta$) si $\eta$ est absolument continue (resp. singulière) par rapport à $\beta$. Si $\eta$ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^d$, on note par $\mathcal{F}(\eta)$ sa transformé de Fourier. Enfin, les limites de measures considérées dans ce travail sont an sens vague.

## 1.2. Définitions

Pour la notion de semi–groupe de convolution, la référence de base est [2].

1) On appelle semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$, toute famille de mesures $\mu := (\mu_t)_{t>0} \subset \mathcal{M}$ vérifiant

$$\forall s, t > 0 : \mu_s * \mu_t = \mu_{s+t} \tag{1.1}$$

$$\forall t > 0 : \mu_t(\mathbb{R}^d) \leq 1. \tag{1.2}$$

$$\lim_{t \to 0} \mu_t = \varepsilon_0. \tag{1.3}$$

2) On dit qu'un semi–groupe de convolution $\mu := (\mu_t)_{t>0}$ est propre (voir [2, 13.2]) si pour tout $f \in \mathcal{K}^+$ on a

$$\kappa(f) := \lim_{\lambda \to 0} \varrho_\lambda(f) = \sup_{\lambda \to 0} \varrho_\lambda(f) = \int_0^\infty \mu_t(f) dt < \infty,$$

où $\varrho_\lambda(f) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(f) dt$, $\forall \lambda > 0$.

3) Une fonction $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite définie négative (voir [2, 7.1]) si pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ on a

$$\sum_{i,j=1}^n (\Psi(\gamma_i) + \overline{\Psi(\gamma_j)} - \Psi(\gamma_i - \gamma_j)) c_i \overline{c_j} \geq 0, \quad \text{pour tout} \quad (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n.$$

## 1.3. Propriétés

Soit $\mu$ un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$. Alors on a les proprietés suivantes:

1. D'après [2, 8.3], il existe une fonction continue unique $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie négative verifiant:

$$\forall t > 0; \forall x \in \mathbb{R}^d : \ \mathcal{F}(\mu_t)(x) = \exp(-t\Psi(x)). \tag{1.4}$$

2. La famille de mesures $\hat{\mu} := (\hat{\mu})_{t>0}$ est aussi un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$. Alors il est clair que $\mu$ et $\hat{\mu}$ sont en dualité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$, c'est à dire $\forall t > 0; \forall f, g \in \mathcal{K}$

$$\int (\mu_t * f)(x) g(x) d\lambda(x) = \int f(x)(\hat{\mu}_t * g)(x) d\lambda(x). \tag{1.5}$$

D'autre part, si $\Psi$ est la fonction définie négative associée à $\mu$, alors $\overline{\Psi}$ est la fonction définie négative associée à $\hat{\mu}$.

## 1.4. Exemples

1. Soit $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ un homorphisme continu alors $\mu := (\varepsilon_{a(t)})_{t>0}$ est un semi–groupe de convolution (dit de translation) sur $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, $\hat{\mu} = (\varepsilon_{-a(t)})_{t>0}$, $\Psi = ia$ et $\kappa$ est l'image par $a$ de la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $[0, \infty]$.

2. Pour tout $t > 0$, soient $g_t := (4\pi t)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\|\cdot\|^2}{4t}\right)$ la fonction de Gauss sur $\mathbb{R}^d$ et $\mu_t := g_t\lambda$, la mesure de densité $g_t$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$. Alors $\mu := (\mu_t)_{t>0}$ est un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$ (dit semi–groupe du mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$). Dans ce cas, $\hat{\mu} = \mu$ et $\Psi(x) = \|x\|^2$. De plus $\mu$ est propre si et seulement si $d \geq 3$ et dans ce cas $\kappa = \lambda * N$ où $N(x) := c_d\|x\|^{2-d}$ est le noyau de Newton avec $c_d = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}$.

3. Soit $\eta \in \mathcal{M}$ telle que $\eta(\mathbb{R}^d) \leq 1$. Posons pour $t > 0$,

$$\mu_t := e^{-t}\exp(t\eta) = e^{-t}\sum_{n\geq 0}\frac{t^n\eta^n}{n!}$$

avec la notation $\eta^0 = \varepsilon_0$ et $\eta^n = \eta*\eta*\ldots*\eta$ ($n$–fois). Alors $\mu = (\mu_t)_{t>0}$ est un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$, dit associé à $\eta$. De plus le semi–groupe $\hat{\mu}$ est associé à $\hat{\mu}$ et $\Psi = 1 - \mathcal{F}(\eta)$. Pour cet exemple, la mesure $\kappa$ est donnée par $\kappa = \sum_{n\geq 0} \eta^n$. Donc $\mu$ est propre si et seulement si cette série est vaguement convergente. Contrairement aux deux exemples précédents, on n'a pas nécessairement dans ce cas $\kappa << \lambda$.

# 2. Lois de sortie

## 2.1. Définition

Soit $\mu = (\mu_t)_{t>0}$ un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$. Une loi de sortie de $\mu$, est une famille de fonctions positives $\varphi = (\varphi_t)_{t>0} \subset L^1_{loc}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall s, t > 0 : \mu_s * \varphi_t = \varphi_{s+t} \ \lambda.p.p. \tag{2.1}$$

Alors on a le

## 2.2. Théorème

*Soit $\varphi = (\varphi_t)_{t>0}$ une famille de fonctions dans $L^1_{loc}$ telle que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est mesurable sur $]0, \infty[$ et $\int_0^\infty \varphi_t dt \in L^1_{loc}$. On suppose que $\mu$ est propre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *$\varphi = (\varphi_t)_{t>0}$ une loi de sortie de $\mu$.*
2. *Il existe une unique mesure $\beta \in \mathcal{M}$ vérifiant $\hat{\mu}_t * \beta) << \lambda$ pour tout $t > 0$ et telle que*

$$\forall t > 0 : \varphi_t = \frac{d(\hat{\mu}_t * \beta)}{d\lambda} \ \lambda.p.p. \tag{2.2}$$

PREUVE. 1) $\Rightarrow$ 2): Soit $(\varphi_t)_{t>0}$ une loi de sortie de $\mu$ telle que $u = \int_0^\infty \varphi_t dt \in L^1_{loc}$. Posons $\alpha_t := \varphi_t \lambda$. Alors $\alpha_t \in \mathcal{M}$ et d'après (1.5) et (2.1) on a, pour tous $f \in \mathcal{K}$ et $s, t > 0$

$$\begin{aligned}
(\hat{\mu}_s * \alpha_t)(f) &= \int \int f(x+y) d\hat{\mu}_s(x) d\alpha_t(y) \\
& \int \int f(x+y) d\hat{\mu}_s(x) \varphi_t(y) d\lambda(y) \\
&= \int (\hat{\mu}_s * f)(y) \varphi_t(y) d\lambda(y) \\
&= \int f(y) (\mu_s * \varphi_t)(y) d\lambda(y) \\
&= \int f(y) \varphi_{s+t}(y) d\lambda(y) \\
&= \alpha_{s+t}(f).
\end{aligned}$$

Ainsi $\alpha = (\alpha_t)_{t>0} \subset \mathcal{M}$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall s, t > 0 : \hat{\mu}_s * \alpha_t = \alpha_{s+t}, \tag{2.3}$$

Comme $u \in L^1_{loc}$ alors la mesure $m := \int_0^\infty \alpha_t dt = u.\, \lambda \in \mathcal{M}$ et d'après (2.3), on a

$$\forall t > 0; m * \hat{\mu}_t = \int_t^\infty \alpha_s ds. \tag{2.4}$$

Il est clair que (2.4) implique que $m * \hat{\mu}_t \leq m$, c'est à dire que $m$ est excessive par rapport à $\hat{\mu}$ (voir [2, 16.1]). Comme $\hat{\mu}$ est propre, il existe alors d'après [2, 16.7 et 16.8] deux mesures uniques $\beta, \eta \in \mathcal{M}$ telle que $m = \hat{\kappa} * \beta + \eta$, avec $\eta = \lim\limits_{t \to \infty} m * \hat{\mu}_t$. Par (2.4), on a $\eta = 0$, c'est à dire que $m = \hat{\kappa} * \beta$.

En utilisant (1.1) et (2.3), on a pour tout $t > 0$

$$\hat{\kappa} * (\hat{\mu}_t * \beta) = m * \hat{\mu}_t = \left( \int_0^\infty \alpha_s ds \right) * \hat{\mu}_t = \int_0^\infty \alpha_s * \hat{\mu}_t ds = \int_0^\infty \alpha_{s+t} ds.$$

C'est à dire

$$\hat{\kappa} * (\hat{\mu}_t * \beta) = \hat{\kappa} * \alpha_t. \tag{2.5}$$

Or, (2.5) et [2, 16.80 impliquent que $\varphi_t, \lambda = \alpha_t = \hat{\mu}_t * \beta$ pour tout $t > 0$.

2) $\to$ 1): Soient $\varphi = (\varphi_t)_{t>0} \subset L^1_{loc}$ et $\beta \in \mathcal{M}$ telles que $\varphi_t. \lambda = \hat{\mu}_t * \beta$ pour tout $t > 0$. D'après (1.1) et (1.5), on a, pour tous $f \in \mathcal{K}$ et $s, t > 0$

$$\begin{aligned}
((\mu_s * \varphi_t).\lambda)(f) &= \int (\mu_s * \varphi_t)(x) f(x) d\lambda(x) = \int (\hat{\mu}_s * f)(x) \varphi_t(x) d\lambda(x) \\
&= (\varphi_t.\lambda)(\hat{\mu}_s * f) = (\hat{\mu}_t * \beta)(\hat{\mu}_s * f) \\
&= \int \int (\hat{\mu}_s * f)(x+y) d\hat{\mu}_t(x) d\beta(y) \\
&= \int \int \int f(x+y+z) d\hat{\mu}_s(z) d\hat{\mu}_t(x) d\beta(y) \\
&= \int \int f(x+y) d(\hat{\mu}_s * d\hat{\mu}_t)(x) d\beta(y) \\
&= \int \int f(x+y) d\hat{\mu}_{s+t}(x) d\beta(y) \\
&= (\hat{\mu}_{s+t} * \beta)(f) = (\varphi_{s+t}.\lambda)(f).
\end{aligned}$$

ce qui implique (2.1), car $(\varphi_t)_{t>0} \subset L^1_{loc}$.

## 2.3. Remarque

Soient $\mu$ un semi–groupe de convolution propre. On note par:

$$\mathcal{M}_\mu := \{\beta \in \mathcal{M} : \forall t > 0 : \hat{\mu}_t * \beta \in \mathcal{M}\}.$$
$$\mathcal{M}_\lambda := \{\beta \in \mathcal{M}_\mu : \beta << \lambda\}.$$

Il est clair que $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{M}_\mu$. Posons

$$\mathcal{S}_\mu := \left\{\beta \in \mathcal{M}_\mu : \left(\frac{d(\hat{\mu}_t * \beta)}{d\lambda}\right)_{t>0} \text{ est une loi de sortie de } \mu\right\}.$$

Alors on déduit du théorème 2.2, que

$$\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{S}_\mu \subset \mathcal{M}_\mu. \tag{2.6}$$

Remarquons qu'en général les inclusions précédentes sont strictes, comme on va le voir dans les exemples çi dessous. Ceci nous ramène à comparer $\mathcal{S}_\mu$ à $\mathcal{M}_\lambda$ et $\mathcal{S}_\mu$ à $\mathcal{M}_\mu$.

## 2.4. Corollaire

*On suppose que $\mu_t << \lambda$ pour tout $t > 0$, alors $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.*

PREUVE. Si $\mu_t << \lambda$ pour tout $t > 0$ alors $\hat{\mu}_t << \lambda$ pour tout $t > 0$ et donc, pour tous $t > 0$ et $\beta \in \mathcal{M}$, on a $\hat{\mu}_t * \beta << \lambda$.

## 2.5. Exemples

1. Soit $\mu = (\varepsilon_{a(t)})_{t>0}$ le semi–groupe de translation sur $\mathbb{R}^d$. Puisque $\varepsilon_0 \in \mathcal{M}_\mu \setminus \mathcal{M}_\lambda$, on déduit que $\mathcal{M}_\lambda \neq \mathcal{M}_\mu$.
D'autre part, $\varepsilon_{-a(t)} * \beta << \lambda$ si et seulement si $\beta << \lambda$. Ce qui donne $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{S}_\mu \neq \mathcal{M}_\mu$.
2. Soit $\mu = (g_t.\lambda)_{t>0}$ le semi–groupe de convolution du mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$. Alors on a $\mathcal{M}_\lambda \neq \mathcal{M}_\mu$, car $\varepsilon_0 \in \mathcal{M}_\mu \setminus \mathcal{M}_\lambda$. D'autre part, il est clair d'après le corollaire 2.4 que $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$. Ce qui donne $\mathcal{M}_\lambda \neq \mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.
3. Soient $\sigma = (\sigma_t)_{t>0}$ et $\nu = (\nu_t)_{t>0}$ deux semi–groupes de convolution sur $\mathbb{R}^d$, alors il est clair que $\mu = (\sigma_t \otimes \nu_t)_{t>0}$ est un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (voir [2, 8.9]). En particulier si $\sigma = (\varepsilon_{a(t)})_{t>}$ et si $\nu = (g_t.\lambda)_{t>0}$, alors on verifie que la mesure $\lambda \otimes \varepsilon_0 \in \mathcal{S}_\mu \setminus \mathcal{M}_{\lambda\otimes\lambda}$ et que $\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_0 \in \mathcal{M}_\mu \setminus \mathcal{S}_\mu$. Par siute, on a $\mathcal{M}_{\lambda\otimes\lambda} \neq \mathcal{S}_\mu \neq \mathcal{M}_\mu$.
4. Soit $\mu := (e^{-t}\exp(t\eta))_{t>0}$ le semi–groupe de convolution associé à $\eta$. Dans ce cas, si $\hat{\mu}_t * \beta << \lambda$ alors $\beta << \lambda$, ainsi $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{S}_\mu$.

## 2.6. Théorème

*Soit $\mu = (\mu_t)_{t>0}$ un semi–groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$ et soit $\Psi$ la fonction définie négative associée à $\mu$ par* (1.4). *Alors on a:*

1. *Si $\Psi$ imaginaire pure, on a $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{S}_\mu$.*

2. *Si pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \exp(-t\Psi(x))$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.*

3. *S'il exste une constante $c > 0$ telle que $|\Psi| \leq c(1 + \Re(\Psi))$ alors $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.*

4. *Si $\Psi$ est réelle alors $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.*

PREUVE.

1. Si $\Psi$ est imaginaire pure, alors d'après [2, 7.20], il existe $\Theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un homomorphisme continu tel que $\Psi = i\Theta$. Soit alors $\tilde{\Theta}$ l'homomorphisme dual associe a $\Theta$ (voir [2, 2.10]). On pose $a$ la restriction de $\tilde{\Theta}$ à $[0, \infty[$. Alors il est clair que $(\varepsilon_{a(t)})_{t>0}$ est un semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$ et que la fonction définie négative associée est $\Psi$ (voir [2, 8.11]). Or, pour cette situation, on a $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{S}_\mu$ d'après l'exemple 2.5.(1).

2. Si pour tout $t > 0$ la fonction $\exp(-t\Psi) = \mathcal{F}(\mu_t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors d'après le Théorème d'inversion (Thórème 2.6 de [2]), on a $\mu_t << \lambda$ pour tout $t > 0$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.4.

3. Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\Psi| \leq c(1+\Re(\Psi))$. Alors on a, d'après [3, 45.4] et [4, Theorem 5.1], $\kappa << \lambda$ si et seulement si $\mu_t << \lambda$, pour tout $t > 0$. On conclut par [1] que $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.

4. Le cas $\Psi$ réelle, est un cas particulier du précédent.

## 2.7. Exemples

1. Soit $\Psi : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty[$ définie par $\Psi(x) = 1+|x|$ si $|x| \leq 1$ et $\Psi(x) = 2$ si $|x| > 1$. Comme $\Psi$ est paire, continue croissante et concave sur $[0, \infty[$, alors $\Psi$ est définie négative, d'après [2, 10.6].

D'autre part, puisque $\Psi$ est réelle, il s'ensuit d'après 2.6.4 que $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.

2. Soient $\Psi(x) = ln(1+x^2) + i\arctan x$ et $f_t(x) = (1/\Gamma(t)) 1_{]0,\infty[}(x) x^{t-1} \exp(-x)$. Alors $\Psi$ est la fonction définie négative associée au semi-groupe $\mu = (f_t.\lambda)_{t>0}$ sur $\mathbb{R}$ (voir [2, p. 73]). On conclut alors par le corollaire 2.4 que $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.

**Remerciments.** Je remercie le Professeur Mohamed Hmissi pour son aide lors de la préparation de ce travail ainsi que le reféree pour toutes ses suggestions.

## REFERENCES

[1] S. Ben Othman, M. Hmissi, *On Subordination of Convolution Semigroups*, to appear.

[2] C. Berg, G. Forst, *Potential theory on locally compact Abelian Groups*, Springer–Verlag Berlin–Heidelberg New York 1975.

[3] C. Dellacherie, P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. XII–XVI, Herman Paris, 1987.

[4] P. J. Fitzsimmons, *Markov Processes and non symmetric Dirichlet Forms without Regularity*, J. Func. Anal. **58** (1989), 287–306.

[5] M. Hmissi, *Lois de sortie et semi-groupes basiques*, Manuscr. Math. **75** (1992), 293–302.

[6] M. Hmissi, *Sur la représentation par les lois de sortie*, Math. Zeitschrift **213** (1993), 647–656.

[7] M. Hmissi, *On the functional equation of exit laws for lattice semigroups*, Rocznik Naukowo–Dydaktyczny WSP w Krakowie **196**, Prace Math. XV (1998), 63–72.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS,
CAMPUS UNIVERSITAIRE, 1060 TUNIS,
TUNISIA

e-mail: Imed.Bachar@ipeigb.rnu.tn