ZENON MOSZNER*

SUR UN THÉORÈME DE S. GOŁĄB

Résumé. On examine en quel degré les suppositions dans un théorème de S. Gołąb, au sujet de la détermination au juste de l'isomorphisme de l'addition et de la multiplication simples, sont essentielles. On démontre aussi une modification de ce théorème et on pose un problème ouvert.

S. Gołąb dans [2] (voir aussi [1]) a démontré le théorème suivant:

Si les fonctions $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ — *le corps des nombres réels*)

(1) sont de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\bigvee_{a\in\mathbf{R}} \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} [f(x,a) = f(a,x) = x \text{ et } g(a,x) = g(x,a) = a], \tag{2}$$

$$\bigvee_{e\in\mathbf{R}} \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} g(e,x) = x, \tag{3}$$

$$\bigwedge_{b,c\in\mathbf{R}} \bigvee_{x\in\mathbf{R}} f(b,x) = c, \tag{4}$$

$$\bigwedge_{x,y,z\in\mathbf{R}} g\big(f(x,y),z\big) = f\big(g(x,z),g(y,z)\big), \tag{5}$$

alors il existe une fonction ω: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *monotone que*

$$f(x,y) = \omega^{-1}\big(\omega(x)+\omega(y)\big), \tag{6}$$

$$g(x,y) = \omega^{-1}\big(\omega(x)\omega(y)\big). \tag{7}$$

Il résulte d'apres la démonstration de ce théorème dans [2] qu'il suffit de supposer au lieu de (1) que

(8) $f(x,y)$ *a la différentielle totale de Fréchet-Stolz dans chaque point de* $\mathbf{R}^2$,

(9) $g(x,y)$ *est continue par rapport à* x *pour chaque* y *de* $\mathbf{R}$,

(10) *il est continue* $g'_y(x,a)$ *pour chaque* $x\in\mathbf{R}$.

Cette note est consacrée à la discussion est-ce que ces suppositions (8), (9) et (10) de la regularité sont essentielles dans ce théorème.

I. Posons $g(x,y) = x\cdot y$ et cherchons quelle doit être f pour remplir (2), (4) et (5). La condition (5) nous donne:

$$f(x,y)z = f(xz,yz)$$

et de là pour $z = 1/x$ ($x \neq 0$) nous avons:

$$f(x,y) = f(1,y/x)\cdot x$$

et pour $\varphi(u) = f(1,u)$

$$f(x,y) = \varphi(y/x)x.$$

Received January 5, 1984.

AMS (MOS) Subject classification (1980). Primary 39B50. Secondary 12D15.

*Instytut Matematyki WSP, Kraków, ul. Podchorążych 2, Poland.

Nous avons d'après (2) pour $a = 0$:

$$f(0, y) = y,$$

donc:

(11) $$f(x, y) = \begin{cases} \varphi(y/x)x & \text{pour } x \neq 0, \\ y & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

La condition (2) pour $a = 0$ nous donne:

$$f(x, 0) = \varphi(0) \cdot x = x,$$

donc

(12) $$\varphi(0) = 1.$$

Passons à la condition (4). Pour $b = 0$ cette condition est remplie pour la fonction (11) par $x = c$. Pour $b \neq 0$ l'équation $f(b, x) = c$ donne

$$f(b, x) = \varphi(x/b)b = c,$$

alors

$$\varphi(x/b) = c/b,$$

la condition (4) implique donc que
(13) le contre-domaine de φ est égal à $\mathbf{R}$.

Inversement chaque fonction f de la forme (11), pour $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ remplissante (12) et (13), satisfait aux (2), (4) et (5).

Supposons à présent que f soit une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$. Il en résulte que
(14) φ doit être une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

De plus la continuité de f au point $(0, y_0)$ pour $y_0 \neq 0$ nous donne

$$f(x, y) \to f(0, y_0) = y_0 \text{ pour } x \to 0, \ y \to y_0$$

alors

$$\varphi(y/x) \cdot x \to y_0$$

et de là pour $x \to 0+$, $y_0 > 0$, en posant $y_0/x = u$ nous avons

$$\varphi(u)/u \to 1 \text{ pour } u \to +\infty,$$

donc φ a la direction asymptotique 1 à $+\infty$. En raisonnant analogiquement pour $y_0 < 0$ et pour $x \to 0+$ nous avons la conclusion que
(15) φ a la direction asymptotique 1 à $\pm\infty$.
Cette supposition avec (14) implique que f donnée par (11) est une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$. Cela est évidente au point (x_0, y_0) pour $x_0 \neq 0$. Pour $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$ nous avons

$$f(x, y) = \varphi(y/x) \cdot x = \frac{\varphi(y/x)}{y/x} \cdot y \to 1 \cdot y_0 = y_0 = f(0, y_0)$$

pour $x \to 0, y \to y_0$.

Pour $x_0 = 0 = y_0$ soit $0 \neq x_n \to 0$ et $0 \neq y_n \to 0$ et soit y_{k_n}/x_{k_n} une suite choisie de la suite y_n/x_n. Dans ce cas la suite $\varphi(y_{k_n}/x_{k_n}) \cdot x_{k_n}$ est choisie de la suite $\varphi(y_n/x_n) \cdot x_n$. On peut choisir de la suite y_{k_n}/x_{k_n} une suite y_m/x_m (désignation simplifiée) qui tend vers α (α finie ou $\alpha = \pm\infty$). De lá

1) si α est finie, alors

$$\varphi(y_m/x_m)x_m \to \varphi(\alpha)0 = 0,$$

2) si $\alpha = \pm\infty$, alors

$$\varphi(y_m/x_m)x_m = \frac{\varphi(y_m/x_m)}{y_m/x_m} \cdot y_m \to 1 \cdot 0 = 0,$$

donc toujours

$$\varphi(y_m/x_m) \cdot x_m \to 0.$$

On peut donc choisir, de chaque suite $\varphi(y_{k_n}/x_{k_n})x_{k_n}$ choisie de la suite $\varphi(y_m/x_m) \cdot x_m$, une suite $\varphi(y_m/x_m) \cdot x_m$ qui tend vers 0 et de là:

$$\varphi(y_n/x_n) \cdot x_n \to 0,$$

ce qui démontre la continuité au point $(0, 0)$ de f donnée par (11).

Si nous supposons que

(16) $\quad \varphi$ est une fonction différentiable sur $\mathbf{R}$,

dans ce cas ils existent pour f donnée par (11) les dérivées f'_x et f'_y au point (x_0, y_0) $x_0 \neq 0$. Il existe d'après (11) aussi $f'_y(0, y_0)$. Nous avons

$$\frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x - 0} = \frac{\varphi(y_0/x)x - y_0}{x} = \varphi(y_0/x) - y_0/x$$

donc si

a) $y_0 = 0$, nous avons $f'_x(0, 0) = 1$,

b) $y_0 \neq 0$, alors si nous supposons que

(17) $\quad \varphi$ a la même asymptote dans $\pm\infty$,

dans ce cas il existe $f'_x(0, y_0)$.

En résumant chaque fonction f donnée par (11), où φ remplit (12)—(17), remplit avec la fonction $g(x, y) = xy$ les conditions (2)—(5) et de plus elle est continue et ils existent f'_x et f'_y sur $\mathbf{R}^2$. De plus la fonction g remplit évidemment (9) et (10). La condition (6) ne doit pas être remplie puisque cette condition implique $f(x, y) = f(y, x)$ et la fonction f donnée par (11) ne doit pas être commutative. En effet la commutativité de f donnée par (11) donne

$$\varphi(u) = \varphi(1/u)u$$

et cette condition ne résulte pas des conditions (12)—(17). En effet il suffit de prendre

$$\varphi(u) = u^3/(u^2+1)+1.$$

Il résulte de nos considérations qu'*on ne peut pas affaiblir la supposition* (8) *dans le théorème de S. Gołąb en remplassant cette supposition par la supposition de la continuité de f et de l'existence de f'_x* et f'_y *sur* $\mathbf{R}^2$.

Pour cela démontre on peut donner aussi un exemple directe

$$f(x, y) = \begin{cases} y^3/(x^2+y^2)+x & \text{pour } (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

et $g(x, y) = xy$.

Remarquons enfin que la supposition que la fonction f donnée par (11) possède la différentielle totale de Fréchet-Stolz dans le point $(0,0)$ nous donne pour $y = tx$:

$$\frac{f(x, y)-y-x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varphi(t)x-tx-x}{|x|(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\varphi(t)-t-1) \to 0$$

pour $x \to 0$, et de là $\varphi(t)-t-1 = 0$, donc $\varphi(t) = t+1$ et $f(x, y) = x+y$.

II. Posons à présent $f(x, y) = x+y$ et cherchons quelle doit être g pour remplir (2), (3) et (5).

La condition (5) nous donne dans ce cas

$$g(x+y, z) = g(x, z)+g(y, z),$$

donc

(18) $g(x, z)$ doit être une famille à un paramètre, avec paramètre z, des fonctions additives de x.

Dans notre cas $f(x, y) = x+y$ nous avons $a = 0$ dans (2), donc cette condition nous donne

$$g(0, z) = 0 \text{ et } g(x, 0) = 0.$$

La condition première résulte de l'additivité de $g(x, z)$ par rapport à x.

Soit a présent H une base de Hamel tel que $1 \in H$ et posons

(19) $$g(1, z) = z \text{ pour chaque } z \text{ de } \mathbf{R}.$$

De plus soit

(20) $g(d, y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ pour chaque $d \neq 1$ fixe de H et telle que

(21) $$g(d, 0) = 0$$

et

(22) $$g'_y(d, 0) = d.$$

Posons

(23) $$g(x, z) = g(\alpha_1 d_1+\ldots+\alpha_n d_n, z) = \alpha_1 g(d_1, z)+\ldots+\alpha_n g(d_n, z)$$

pour $x = \alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_n d_n$ et $d_\nu \in H$ pour $\nu = 1, \ldots, n$. $g(x, z)$ est une fonction additive pour rapport à x. D'après (21) nous avons

$$g(x, 0) = \alpha_1 g(d_1, 0) + \ldots + \alpha_n g(d_n, 0) = 0,$$

donc (2) a lieu. D'après (19) il est remplie (3). La fonction $g(x, y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à y d'après (20) et de plus

$$g'_y(x, 0) = \alpha_1 \big(g'(d_1, y)\big)_0 + \ldots + \alpha_n \big(g'(d_n, y)\big)_0 = \alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_n d_n = x,$$

donc (10) a aussi lieu.

En résumant chaque fonction g donnée par (23), où $g(d, y)$ remplit (19)—(22) pour chaque d de H, remplit avec la fonction $f(x, y) = x + y$ les conditions (2)—(5). Elle ne doit pas être de la forme (7), puisque la fonction de cette forme est commutative et la fonction donnée par (23) ne doit pas être commutative. En effet si nous prenons un h de H et $h \neq 1$ et supposons au-dessus de (19)—(22) que $g(h, 1) \neq h$ nous avons d'après (19)

$$g(1, h) = h \neq g(h, 1).$$

Il en résulte que *la supposition* (9) *est essentielle dans le theoreme de S. Gołąb.*

III. Passons à la supposition (10). Dans le cas si $f(x, y) = x + y$ la condition (5) nous donne la conclusion (18) et la supposition (9) implique que $g(x, z) = \varphi(z) \cdot x$, que avec (3) implique

$$\varphi(z) \cdot e = z.$$

Puisque $e \neq 0$ (dans notre cas $f(x, y) = x + y$, alors $a = 0$ et $e = 0$ donne d'après (2) et (3): $x = g(e, x) = g(0, x) = 0$) on a

$$\varphi(z) = z/e$$

et de là

$$g(x, y) = xz/e.$$

Il en résulte que g remplit (10) dans ce cas $(f(x, y) = x + y)$.

Dans le cas général le problème est-ce-que la supposition (10) est essentielle dans notre théorème reste ouvert.

Nous démontrerons en liaison avec ce problème le théorème suivant: *Si les fonctions f et g remplissent* (2), (3) *et* (5) *et de plus*

(24) *il existe g'_x sur* $\mathbf{R}^2$

et

(25a) *il existe $f'_x(a, y) \neq 0$ continue par rapport à y*

ou

(25b) *il existe $f'_y(x, a) \neq 0$ continue par rapport à x,*

alors g satisfait aussi à la supposition (10).

Démonstration (dans le cas de la supposition (25a)).

En différentiant (5) par rapport à x au point $x = a$ nous recevons

(26) $$g'_x(y, z) \cdot f'_x(a, y) = f'_x(a, g(y, z)) \cdot g'_x(a, z).$$

En désignant

$$F(y) = \int_a^y [f'_x(a,t)]^{-1} dt$$

nous avons d'après (26)

$$(F(g(y,z)) - F(y)\, g'_x(a,z))'_y = 0.$$

Il en résulte qu'il existe une fonction $\varphi(z)$ telle que

$$F(g(y,z)) - F(y) g'_x(a,z) = \varphi(z).$$

En posant ici $y = a$ nous avons puisque $F(a) = 0$ que $\varphi(z) \equiv 0$, donc

$$F(g(y,z)) - F(y) g'_x(a,z) \equiv 0.$$

De là puisque $F'(y) \neq 0$ on a

$$g(y,z) = F^{-1}[F(y) g'_x(a,z)].$$

Nous avons en posant ici $y = e$ d'après (3)

$$z = F^{-1}[F(e) g'_x(a,z)],$$

d'où

$$F(z) = F(e) g'_x(a,z).$$

Puisque $F'(z) \neq 0$ nous avons $F(e) \neq 0$ et

$$g'_x(a,z) = F(z)/F(e).$$

De là

$$g(y,z) = F^{-1}[F(y)F(z)/F(e)],$$

la fonction g remplit donc la supposition (10), c.q.f.d.

La démonstration dans le cas (25b) est analogue.

Remarquons qu'il en résulte d'après le théorème de S. Gołąb que *les fonctions f et g remplissantes les suppositions du théorème démontré plus haut et les conditions* (4) *et* (8), *sont de la forme* (6) *et* (7).

La forme (7) de la fonction g résulte aussi directement de (27) puisque en posant $\omega(x) = F(x)/F(e)$ nous avons

(28) $$g(x,y) = \omega^{-1}[\omega(x) \cdot \omega(y)]$$

avec ω monotone, puisque $\omega'(x) = F'(x)/F(e) \neq 0$.

En différentiant (5) par rapport à z au point $z = a$ nous recevons (ici $f(x,y) = x+y$):

(29) $$g'_y(f(x,y),a) = g'_y(x,a) + g'_y(y,a)$$

et puisque d'après (28)

$$g'_y(x,a) = (\omega^{-1})'(\omega(x)\omega(a))\omega(x)\,\omega'(a)$$

et

$$\omega(a) = F(a)/F(e) = 0,$$

nous avons

$$g'_y(x, a) = (\omega^{-1})'(0)\omega(x)\omega'(a) = \omega(x).$$

On a donc d'après (29)

$$\omega(f(x, y)) = \omega(x)+\omega(y)$$

et de là

$$f(x, y) = \omega^{-1}(\omega(x)+\omega(y)),$$

la fonction f a donc la forme (6).

En réalité nous avons démontré une modification suivante du théorème de S. Gołąb:

Si f et g remplissent (2), (3), (5), (8), (24), (25a) *ou* (25b) *dans ce cas elles sont de la forme* (6) *et* (7).

Pour démontrer que la supposition (10) est essentielle dans le théorème de S. Gołąb il suffit de montrer l'exemple d'une fonction $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ remplissante (2), (4) et (8), n'étant pas de la forme (6), pour laquelle l'équation fonctionnelle

$$\varphi(f(x, y)) = f(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{30}$$

a une famille $\mathscr{F}$ des solutions à un paramètre dans ce sens que

$$\bigvee_{x_0\in\mathbf{R}} \bigwedge_{y_0\in\mathbf{R}} \bigvee_{\varphi\in\mathscr{F}} [\varphi(x_0) = y_0].$$

En effet en désignant par $\varphi_{y_0}(x)$ un des elements de la famille $\mathscr{F}$ pour lequel $\varphi_{y_0}(x_0) = y_0$ et en posant $g(x, y) = \varphi_y(x)$, nous voyons ~~qué~~ g remplit (9) et (3) pour $e = x_0$ et f et g remplissent (5), même que g ne satisfait pas à (10) puisque f n'est pas de la forme (6).

J'ai posé le problème d'existence de la fonction f plus haut à la 21-ième conférence au sujet des équations fonctionnelles en Konolfingen en Suisse en 1983 ([3]). Mr K. Strambach a me dit pendant cette conférence qu'une telle fonction existe (une méthode de la construction d'une fonction de cette sorte par une voie géométrique sera probablement publié dans Aequationes Math.), donc si l'exemple serait bon la supposition (10) serait essentielle dans le théorème de Gołąb.

Nos considérations plus haut montrent que si *l'équation* (30) *a une famille des solutions différentiables et à un paramètre pour une fonction f remplissante* (2), (4), (8) *et* (25a) *ou* (25b), *dans ce cas f doit être de la forme* (6).

TRAVAUX CITES

[1] S. GOŁĄB, *Przyczynek do algebry działań w ciele liczb rzeczywistych*, Rocznik Nauk.-Dydakt. WSP w Krakowie 1(1954), 3—10.

[2] S. GOŁĄB, *Zum distributiven Gesetz der reellen Zahlen*, Studia Math. 15 (1956), 353—358.

[3] Reports of Meetings, XXI International Symposium on Functional Equations, August 6—13, 1983, Konolfingen (Switzerland).