LES ÉQUATIONS DE PRÉ–SCHRÖDER

ZENON MOSZNER

À la memoire de György Targonski

Résumé. On donne la revue des résultats au sujet des équations de pré–Schröder introduites par G. Targonski. On formule aussi des problèmes ouverts.

G. Targonski [1] a reçu, pendant 7$^{\mathrm{e}}$ ISFE (International Symposium on Functional Equations) en 1969, de l'équation de Schröder

$$\phi(\omega(x)) = \lambda\phi(x), \tag{1}$$

où ϕ et ω sont des fonctions réelles des variables réelles et λ est une constante réelle, par l'élévation à la puissance n : $(\phi(\omega))^n = \lambda^n\phi^n$ et par l'itération n fois: $\phi(\omega_n) = \lambda^n\phi$, où ω_n désigne l'itération n fois de la fonction, ω, d'où

$$(\phi(\omega))^n = \phi^{n-1}(\phi(\omega_n)). \tag{2.n}$$

Il a nommé ce système dernier les équations de pré–Schröder et il a posé la question suivante:
— est-ce que (2.n) est équivalent à (1) dans ce sens que si nous avons (2.n) il existe une constante réelle λ telle que (1) est satisfaite?

Plus précisément: ω dans (1) est une fonction donnée, ϕ est une fonction cherchée, donc l'équivalence de (2.n) et (1) désigne (puisque (1) $\Rightarrow$ (2.n) toujours) qu'il existe une constante λ (qui peut dépendre de ω) telle que chaque solution ϕ de (2.n) remplit aussi (1).

Received: November 24, 1998.

AMS (1991) subject classification: Primary 39B12, 39B62.

Z. Moszner [2] a donné la réponse négative à cette question en remarquant que si $\mu(x) := (\operatorname{sgn} x)\lambda$, où $\operatorname{sgn} 0 := 1$, $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} \omega(x)$ et

$$\phi(\omega(x)) = \mu(x)\phi(x), \tag{3}$$

dans ce cas

$$\mu(\omega(x)) = \mu(x), \tag{4}$$

alors (2.n) a lieu et (1) ne doit pas être satisfaite (avec λ constant).

G. Targonski [3] dans la suite a posé la question est-ce que (2.n) est équivalente aux (3) et (4), c.à d. est-ce que (2.n) implique qu'il existe une fonction $\mu(x)$ remplissante (3) et (4).

Z. Moszner [4] a donné à cette question la réponse positive. Si seulement (2.2) a lieu et si nous posons

$$\mu = \begin{cases} \frac{\phi(\omega)}{\phi} & \text{sur } \{x : \phi(x) \neq 0\}, \\ 0 & \text{sur } \{x : \phi(x) = 0\}, \end{cases}$$

nous avons (3) et (4). Il en résulte que (2.2) implique (2.n) pour chaque n.

M. Kuczma [6] a remarqué que le raisonnement plus haut est valable si la fonction ϕ a les valeurs dans un groupe ou dans un corps et il a donné un contre-example, même si (2.n) sont remplies pour chaque n, si ces valeurs sont dans un semi-groupe commutatif. Il a formulé le problème est-ce que (2.2) implique (2.n) pour chaque n pour la fonction ϕ des valeurs dans un semi-groupe commutatif?

J. Drewniak et J. Kalinowski [12] ont démontrés que si ϕ a les valeurs dans un semi-groupe commutatif et muni (éventuellement) d'un zéro et remplissant la condition

$$xy = xz \quad \text{et} \quad x \neq 0 \Rightarrow y = z, \tag{5}$$

alors (2.2) implique (2.n) pour chaque n. Ils montrent aussi que aucune équation (2.m) pour $m > 2$ fixé n'implique pas du système (2.n) pour $n > m$. Ils donnent aussi dans [13] les trois exemples des solutions de (2.2) qui ne satisfont pas au système (2.n) pour $n > 2$. Ces solutions sont définies dans les structures algébriques qui vérifient seulement deux des suppositions de l'associativité, de la commutativité et de la loi de réduction (5), en donnant par ça la réponse négative au problème de Kuczma plus haut.

S'il s'agit de la question prèmiere de G. Targonski M. Kuczma [10] a donné une classe vaste des fonctions $\omega : E \to E$, où E est un ensemble arbitraire, et ϕ définies dans E et des valeurs dans un groupe commutatif qui peut être muni d'un zèro, pour lesquelles (2.n) n'implique pas (1). Pour cela il suffit que pour un entier pair k il existe un point a fixe d'ordre k pour la fonction ω, c.à d. $\omega_k(a) = a$ et $\omega_l(a) \neq a$ pour $0 < l < k$ et il n'est pas vrai que pour chaque a et b de E ils existent des entiers non-négatifs i et j pour lesquels $\omega_i(a) = \omega_j(b)$. Si E est un intervalle dans $\mathbb{R}$ et ω est continue il suffit que ω ait le point fixe d'ordre $k \geq 2$ ou il suffit que ω n'est pas constante dans aucun intervalle et qu'elle ne possède pas des points fixes.

U. Burkart [15], en généralisant le résultat de Z. Moszner, a démontré que (2.n) pour n fixé est équivalente à (3) avec

$$\mu^n = \mu(\omega_{n-1})\mu(\omega_{n-2})...\mu.$$

Dans le cas réel ou complex quelques suppositions de la régularité assurent l'implication de (2.2) à (1). M. Kuczma et G. Targonski [5] ont démontrés les théorèmes suivants:

- si $\omega : A \to A$ ($A \subset \mathbb{R}$ ou $A \subset \mathbb{C}$), $\xi \in \mathrm{int} A$, $\omega(\xi) = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(x) = \xi$ pour chaque x dans $A, \omega(x) \neq \xi$ pour $x \in A$ et $x \neq \xi$, s'il existe $\omega'(\xi)$, ϕ et ω remplissent (2.2) et s'il existe $\phi'(\xi) \neq 0$, alors (1) a lieu avec $\lambda = \omega'(\xi)$,
- si $\omega \neq$ const est holomorphe dans la région $A, \xi \in A$ est tel que $\omega(\xi) = \xi$ et $|\omega'(\xi)| < 1$, ϕ est aussi holomorphe dans A, ϕ et ω satisfont à (2.2), alors (1) a lieu avec $\lambda = \omega'(\xi)^k$, où k est l'ordre de la racine ξ pour ϕ (si $\phi \equiv 0$, λ peut être arbitraire).

En liaison à la dépendance entre (1) et (2.2) on peut poser [8] le problème suivant: caractériser les fonctions ω pour lesquelles (2.2) $\Rightarrow \exists\lambda$ (1) pour chaque fonction ϕ. On peut démontrer ici:

1. qu'il existe des fonctions ω qui ont cette propriété, p. ex.
   a) chaque fonction ω a deux valeurs a et b pour laquelle $\omega(a) = b$ et $\omega(b) = a$,
   b) chaque fonction ω stable sur l'ensemble de ses valeurs, c. à d. telle que $\omega(\omega(x))$ =const,
2. que seulement les fonctions $\omega(x) = x$ ou $\omega(x)$ =const ont cette propriété parmi les fonctions idempotentes, c. à d. telles que $\omega(\omega(x)) = \omega(x)$,
3. que seulement la fonction $\omega(x) = x$ a cette propriété parmi les fonctions strictement croissantes ou parmi les fonctions pour lesquelles $\omega(\omega(x)) = x$, c. à d. parmi les involutions.

G. Targonski [14] a aussi supposé que ϕ a les valeurs dans un groupe A abélien sans torsion en appliquant dans ce cas notation additive dans A, ce qui donne l'équation de Abel

$$\phi(\omega(x)) = \omega(x) + \lambda \tag{6}$$

au lieu de l'équation (1) et les équations de pré-Abel

$$n\phi(\omega(x)) = (n-1)\phi(x) + \phi(\omega_n(x)) \tag{7.n}$$

au lieu des équations (2.n). La supposition que A est sans torsion permet donner les résultats nouveaux [14]:

– l'équation (7.2) implique l'existence de λ constant tel que (6) a lieu si et seulement si le graphe de la fonction ω est connexe ou chaque son composante connexe contient un cycle,

– si ω est idempotente ou est une involution, alors

$$\phi(\omega) = \omega + \alpha \quad \text{et} \quad \alpha(\omega) = \alpha \tag{8}$$

implique l'existence de λ telle que (6) a lieu,

– si le domaine et le contre-domaine de ω forme un ensemble indénombrable et le graphe de ω a la composante connexe qui est une ω-chaine ou $\omega^* + \omega$-chaine, alors (8) n'implique pas l'existence de λ tel que (6) a lieu.

U. Burkart [15] dans le cas de l'équation de Abel a démontré:

– si ϕ remplit (7.m) pour un m fixé et $m \geq 3$ et pour $\alpha := \phi(\omega)/\phi$ on a $\alpha(\omega_m) = \alpha$ ou $\alpha(\omega_m) = \alpha(\omega)$ ou si ϕ remplit (7.p) et (7.p+1) pour un p fixé, alors ϕ satisfait à (7.2), donc tout système (7.n) a lieu.

Il y a les deux généralisations des considérations plus haut.

(I). G. Targonski [17] a proposé remplacer, pendant 34$^{\text{e}}$ ISFE en 1996, $\phi(\omega)$ dans (1) par un endomorphism linéaire Ω de l'algèbre des fonctions, c. à d. considérer l'équation

$$\Omega(\phi) = \lambda\phi \tag{9}$$

et comme les pré-équations

$$[\Omega(\phi)]^n = \Omega_n(\phi)\phi^{n-1}. \tag{10.n}$$

Si nous posons ici $\Omega(\phi) = \phi(\omega)$ nous recevons (1) et (2.n). G. Targonski dans un manuscrit de sa conférence pendant 34$^{\text{e}}$ ISFE a donné deux exemples suivants. En prenant $\Omega(\phi)(x) := \phi'(x)$, (9) a la forme $\phi'(x) = \lambda\phi(x)$, la solution est de la forme $\phi(x) = C exp \lambda x$ et pour (10.2): $[\phi'(x)]^n = \phi(x)\phi''(x)$ nous avons $\phi(x) = C exp \nu x$ avec ν arbitraire, donc les solutions de (10.2) ne sont pas des solutions de même équation de la forme (9). Remarquons que pour chaque solution de (10.2) il existe un λ pour lequel (9) a lieu, il suffit prendre $\lambda = \nu$. En posant

$$\Omega(\phi)(x) := \int_0^1 \omega(x,y)\phi(y)\,\mathrm{d}\,y,$$

nous avons comme (9):

$$\int_0^1 \omega(x,y)\phi(y)\,\mathrm{d}\,y = \lambda\phi(x)$$

et comme (10.2):

$$\left(\int_0^1 \omega(x,y)\phi(y)\,\mathrm{d}\,y\right)^2 = \phi(x)\int_0^1 \omega_2(y,z)\phi(z)\,\mathrm{d}\,z,$$

où

$$\omega_2(x,z) := \int_0^1 \omega(x,y)\phi(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

On peut poser pour cette généralisation toutes questions susdites, ces problèmes sont ouverts.

(II). L. Reich [18], en remarquant que d'après (4) $(\mu(x), \mu(\omega(x)))$ est une racine le polynôme $X - Y$, a proposé une généralisation suivante. Considérons l'équation (3) avec la condition

$$Q(\mu(x), \mu(\omega(x))) = 0,$$

où Q est polynôme $Q(X,Y)$ tel que $\frac{\partial Q}{\partial Y} \neq 0$. Si on peut prolonger $\mu(\omega_n)$ et $\phi(\omega_n)$ dans un corps des fonctions il existe une suite des polynômes $Q_n(X,Y,Z)$ tels que $\frac{\partial Q_n}{\partial Z} \neq 0$ pour laquelle

$$Q_n(\phi(x), \phi(\omega(x)), \phi(\omega_n(x))) = 0. \tag{11.n}$$

Ils se posent les problèmes:

a) Quels sont les rapports entre les équations (11.n)?
b) Introduire pour l'équation (3) le système analogue à (11.n) dans le cas si $\mu(\omega_n)$ et $\phi(\omega_n)$ ne sont pas prolongeables dans un corps des fonctions.

Quelques des considérations susdites sont données dans la monographie [16] p. 368-371.

Travaux cités

[1] G. Targonski, *Problem (P63)*, Aequationes Math. 4 (1970), 251.

[2] Z. Moszner, *P63S1*, Aequationes Math. 4 (1970), 395.

[3] G. Targonski, *P63R1*, Aequationes Math. 4 (1970), 395.

[4] Z. Moszner, *P63S2*, Aequationes Math. 4 (1970), 395.

[5] M. Kuczma, G. Targonski, *On a Pre–Schröder equation*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 18 (1970), 721–724.

[6] M. Kuczma, *P63R2*, Aequationes Math. 5 (1970), 327–328.

[7] G. Targonski, *On Pre–Schröder equations*, Aequationes Math. **8** (1972), 157.

[8] Z. Moszner, *Problème au sujet de l'équation Pre–Schröder*, Aequationes Math. **8** (1972), 177.

[9] Z. Moszner, *Sur un problème relatif aux équations de Pré–Schröder*, Ann. Pol. Math. **27** (1973), 289–292.

[10] M. Kuczma, *Quelques observations à propos de l'équation pré–Schröder*, Ann. Pol. Math. **28** (1973), 49–52.

[11] G. Targonski, *Pre–Abel equation*, Aequationes Math. **11** (1974), 304–305.

[12] J. Drewniak, J. Kalinowski, *Les relations entre les équations pré–Schröder I*, Ann. Pol. Math. **32** (1976), 5–11.

[13] J. Drewniak, J. Kalinowski, *Les relations entre les équations pré–Schröder II*, Ann. Pol. Math. **33** (1977), 287–292.

[14] G. Targonski, *Orbit properties of functions and "Pre–Abel" equations*, Ann. Pol. Math. **33** (1977), 247–253.

[15] U. Burkart, *Verallgemeinerte Schroedergleichung und Prä–Schroedergleichungen*, Ann. Pol. Math. **40** (1983), 109–114.

[16] M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger, *Iterative functional equations*, Cambrige University Press, 1990.

[17] G. Targonski, *Introducing the "Pre–Eigenvalue Equations"*, Aequationes Math. **53** (1997), 182.

[18] L. Reich, *Remark. (Introducing pre–linear equations)*, Aequationes Math. **55** (1998), 296 –297.

Instytut Matematyki
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
Podchorążych 2
30-084 Kraków
Pologne