

KS. JERZY DADACZYŃSKI

SWOISTOŚĆ MATEMATYKI W UJĘCIU GEORGA CANTORA*

Wydaje się, że badaniom prowadzonym przez naukowców towarzyszy zazwyczaj jakaś koncepcja swoistości, natury matematyki, zakładająca istnienie zbioru kryteriów, rozstrzygających, co to jest matematyka¹. Koncepcja ta w wypadku poszczególnych naukowców może posiadać formę nie uświadomionych lub oczywistych „przedzałożeń”. Stanowi ona – jak należy przypuszczać – rodzaj potencjalnego „tła heurystycznego”, do którego można się odwoływać w sytuacjach problemowych².

Zadaniem niniejszego artykułu jest określenie tego, jaką koncepcją swoistości matematyki dysponował Cantor, jakie kryteria rozstrzygały w jego pojęciu o matematyczności danej teorii. W ramach badań dotyczących heurystycznych funkcji założeń filozoficznych w powstaniu teorii mnogości istotne będzie to, na ile przesłanki filozoficzne determinowały określenie wspomnianych kryteriów. W podsumowaniu podjęta zostanie próba odpowiedzi na pytanie, jaką funkcję heurystyczną mogły spełnić owe kryteria w powstaniu teorii mnogości. Prowadząc badania, należy oczywiście uwzględnić, że kryteria te mogły się zmieniać wraz z rozwojem (i pod wpływem) nowej teorii.

Kwestia swoistości matematyki sprowadza się do wyodrębnienia takich jej cech, które wyróżniają ją spośród innych nauk³. Zagadnienie zostanie opracowane w dwóch etapach. Najpierw poszukiwana będzie odpowiedź na pytanie: jakie warunki – zdaniem Cantora – musiała spełniać teoria, aby można ją było zaliczyć do matematyki? Problem ten w literaturze przedmiotu nazywany bywa „zagadnieniem *unifikacji* matematyki”⁴.

Okaże się, że Cantor pierwszy podał pomysł, aby jako kryterium matematyczności teorii uznać możliwość jej sprowadzenia do teorii mnogości. Przyjęcie przez Cantora takiego kryterium rodzi jednak istotny – z logicznego punktu widzenia –

* Fragmenty rozprawy doktorskiej pt. *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*. Kraków 1994.

¹ Kryteria swoistości matematyki mogą być między innymi natury ontologicznej, epistemologicznej, psychologicznej lub odwoływać się do metod stosowanych w matematyce. Współcześnie postępuje się czasami inaczej. Teorie *unifikuje* się [zob. przypis 4] przez sprowadzenie ich do teorii mnogości i formułuje się następujące kryterium: matematyczną jest każda teoria dająca się adekwatnie wyrazić w kategoriach teorii mnogości [Por. J. Perzanowski, *Podstawy matematyki i logiki*, w: *Mała encyklopedia logiki*, Wrocław 1988², s. 144, 150 (141-151)].

² Por. tamże, s. 142.

³ Por. tamże, s. 144.

⁴ Por. tamże, s. 145, 150.

Czasami jednak terminu „*unifikacja*” używa się na określenie tego, co w niniejszej pracy za J. Perzanowskim nazwane zostało „*systematyzacją* matematyki” [zob. s. 52]. W tym znaczeniu posługuje się terminem „*unifikacja*” grupa francuskich matematyków publikujących pod pseudonimem N. Bourbaki [Por. N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, tłum. z francuskiego S. Dobrzycki, Warszawa 1980, s. 35].

problem: czy w ten sposób nie rozszerzył on *implicite* zakresu matematyki o teorie, które tradycyjnie do niej nie były zaliczane?

Wspomniane kryterium matematyczności opiera się na uprzednim stwierdzeniu możliwości *systematyzacji* matematyki. Toteż przed zaprezentowaniem tego, jak Cantor doszedł do sformułowania swego kryterium, omówione zostaną dziewiętnastowieczne dokonania w zakresie *systematyzacji*. *Systematyzacja* jest tu rozumiana jako uporządkowanie dyscyplin matematyki według jakiegoś merytorycznego kryterium lub podanie planu, według którego możliwe byłoby rozwinięcie matematyki jako jednolitej budowli⁵.

Ze względu na dość niejasny – z logicznego punktu widzenia – status pierwszego kryterium matematyczności, poszukiwane będą w tekstach Cantora inne kryteria. Postawiona zostanie kwestia: czy na bazie swego fundamentalnego, ontologicznego podziału rzeczywistości na sferę transsubiektywną i intrasubiektywną był on w stanie podać warunki swoistości matematyki? Ponieważ zwykle się odróżniać matematykę od innych nauk ze względu na metodę, udzielona też zostanie odpowiedź na pytanie: czy traktował on matematykę jako naukę aksjomatyczno-dedukcyjną i czy w stosowaniu tej metody nie dostrzegał swoistości matematyki?

W drugiej części artykułu zagadnienie specyfiki matematyki – według koncepcji twórcy teorii mnogości – zostanie ukazane w innym aspekcie, przez określenie jej „miejsc” albo raczej stosunku do innych nauk, czy szerzej – do niektórych wytworów kultury.

Prezentacja Cantorowskiego ujęcia relacji matematyki do nauk przyrodniczych będzie podjęta skrótowo. Zostanie ona bowiem zarysowana w pierwszej części pracy, poruszającej między innymi kwestię kryteriów demarkacji obydwu typów nauk.

Istotniejsza będzie prezentacja i analiza relacji zachodzących według Cantora pomiędzy matematyką i filozofią oraz matematyką i teologią⁶. Ukazane zostanie, na ile twórca teorii mnogości był świadom i jak charakteryzował rolę filozofii w określaniu istotnych założeń matematyki⁷.

Mając na uwadze wielość relacji pomiędzy matematyką a filozofią w ujęciu Cantora i uwzględniając, że akceptował on ścisły związek między filozofią a teologią, wypada też naświetlić to, jak twórca teorii mnogości postrzegał przynajmniej pośrednie związki matematyki z teologią.

I. KRYTERIA MATEMATYCZNOŚCI TEORII

Zgodnie z zapowiedzią należy obecnie wskazać, jakie kryteria matematyczności podane zostały przez Cantora.

⁵ Por. Perzanowski, dz. cyt., s. 145.

⁶ Filozofia, a przynajmniej metafizyka oraz teologia były traktowane przez Cantora jako nauki („Wissenschaft”) [zob. przypis 96].

⁷ Przedmiotem analizy będzie meta-koncepcja Cantora, określająca dlaczego i ewentualnie wedle jakich reguł pewne tezy filozofii określają przedmiot i zasady poznania matematyki.

1. Sprowadzalność do teorii mnogości

Jak zauważono, podstawą dla jednego z kryteriów matematyczności teorii według Cantora wydaje się być jej sprowadzalność⁸ do teorii mnogości. Taka bowiem intuicja zdaje się być wyrażona w jego stwierdzeniu z roku 1884, głoszącym, iż „*czysta matematyka jest niczym innym, jak czystą teorią mnogości*”⁹.

Zanim jednak będzie możliwe przystąpienie do staranniejszego przeanalizowania przytoczonego stwierdzenia pod kątem tego, czy rzeczywiście zawierało w ujęciu Cantora kryterium matematyczności i na ile, z logicznego punktu widzenia, było to przekonanie uzasadnione, należy zauważyć, że zostało ono oparte na co najmniej dwu istotnych założeniach.

1. Matematykę można *usystematyzować*¹⁰ według jakiegoś merytorycznego kryterium.

2. Owym kryterium *systematyzacji* jest sprowadzalność jednej teorii do drugiej, przy czym wśród dyscyplin matematycznych można i należy, *systematyzując* je według tego kryterium, wyróżnić dyscyplinę „pierwszą”, „podstawową”¹¹.

1.1. Systematyzacja matematyki w dziewiętnastym wieku

Należy zapytać: czy już przed powstaniem teorii mnogości wysuwano tezę o możliwości *usystematyzowania* matematyki i czy istniała jakaś konkretna koncepcja, jak to uczynić? Ważne też będzie, czy taka ewentualna, wcześniejsza koncepcja wywarła jakiś wpływ na Cantorowskie przekonania w tym zakresie.

1.1.1. Arytmetyzacja jako podstawa systematyzacji

Rozwój matematyki w drugiej połowie dziewiętnastego wieku, jeszcze przed powstaniem teorii mnogości – zdaniem niektórych historyków matematyki – umożliwił *systematyzację* całej matematyki klasycznej¹². Proces ten można inaczej nazwać „arytmetyzacją”, za dziedzinę „podstawową” matematyki uważano bowiem wówczas arytmetykę liczb naturalnych. Do niej – jak sądzono – można było sprowadzić wszystkie znane dyscypliny matematyczne, czyli właśnie matematykę klasyczną. Relację sprowadzania rozumiano wówczas jako możliwość wskazania lub skonstruowania modelu jednej teorii w dziedzinie matematycznej będącej

⁸ Termin ten użyty jest tutaj w znaczeniu intuicyjnym. Dalsze analizy będą miały między innymi na celu wyjaśnienie tego, jak Cantor rozumiał sprowadzalność jednej teorii do drugiej [zob. przypis 13].

⁹ „Sie (die allgemeine *Typhentheorie* – J.D.) bildet einen wichtigen und grossen Theil der *reinen Mengenlehre* (Theorie des ensembles), also auch der *reinen Mathematik*, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts Anderes als *reine Mengenlehre*”. G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, w: I. Grattan-Guinness, *An unpublished paper by Georg Cantor. Principien Einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, „Acta Mathematica” 89 (1970) Bd. 124, s. 84 (65-107). - Ta część artykułu Cantora powstała jesienią 1884 roku [Por. Grattan-Guinness, dz. cyt., s. 82].

¹⁰ Zob. s. 52.

¹¹ Zob. przypis 13.

¹² Zagadnienie to jest przez niektórych autorów przedstawiane odwrotnie. Według ich koncepcji *systematyzacja* całej matematyki była celem, a nie skutkiem badań prowadzonych przez matematyków w dziewiętnastym wieku. Tak przynajmniej zdaje się widzieć tę kwestię N. Bourbaki [Por. Bourbaki, dz. cyt., s. 35-37].

modelem innej teorii. Przy czym tę drugą uważano za bardziej „podstawową”, *logicznie pierwotną*¹³.

Jeszcze na początku dziewiętnastego wieku wydawało się, że taka *systematyzacja* matematyki będzie niemożliwa. Problemem było sprowadzenie analizy matematycznej, opartej od czasu jej powstania na niejasnym i budzącym wiele kontrowersji pojęciu wielkości nieskończenie małej, do arytmetyki liczb naturalnych. Przeszkodę tę udało się jednak usunąć w dwóch przebiegających po części równolegle etapach.

Po pierwsze, dzięki pracom B. Bolzano, A. Cauchy’ego i K. Weierstrassa udało się wyeliminować z analizy wielkości nieskończenie małe i oprzeć tę dyscyplinę na pojęciu liczb rzeczywistych. Drugi etap sprowadzenia analizy do arytmetyki liczb naturalnych polegał na kolejnym znajdowaniu modeli: teorii liczb wymiernych w dziedzinie liczb całkowitych oraz teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych.

Pierwszego zadania podjęło się około roku 1860 kilku matematyków: H. Grassmann, H. Hankel oraz K. Weierstrass. K. Weierstrass – w swych nie publikowanych wykładach – przedstawił najprawdopodobniej po raz pierwszy pomysł uzyskania modelu liczb wymiernych w dziedzinie uporządkowanych par liczb całkowitych. Natomiast drugiego zadania, które w takiej czy innej formie wymagało przyjęcia istnienia zbioru aktualnie nieskończonego¹⁴, podjęli się z dobrym skutkiem,

¹³ Dalej, dla uproszczenia terminologii będzie mowa o znalezieniu modelu jednej teorii w innej teorii. Rzecz jasna, w drugiej połowie dziewiętnastego wieku nie używano jeszcze metamatematycznego terminu „model”, ale intuicyjnie przyjmowano jako oczywiste pewne własności wyrażane wspólnie w teorii modeli. Najlepszym przykładem może być Cantorowska konstrukcja liczb rzeczywistych, która była – we współczesnych kategoriach metamatematycznych – niczym innym, jak znalezieniem modelu liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych.

Zamiast mówić, że sprowadzalność jednej teorii do drugiej to konstruowanie modelu jakiejś teorii w pewnej dziedzinie, można też twierdzić, że owo sprowadzanie to możliwość adekwatnego wyrażenia jednej teorii w kategoriach innej. Przykład stanowi Cantorowskie określenie liczby rzeczywistej jako ciągu podstawowego liczb wymiernych (klasy wszystkich ciągów podstawowych, współbieżnych do danego ciągu).

Scharakteryzowana tu relacja sprowadzania jednej teorii do innej była z całą pewnością traktowana jako relacja przechodnia. Dla każdej teorii winna była istnieć – jak sądzono – teoria bardziej „podstawowa”, za wyjątkiem rzecz jasna arytmetyki liczb naturalnych.

Natomiast nie traktowano relacji sprowadzania jako relacji spójnej. Brak wymogu spójności nie pozwala relacji sprowadzania klasyfikować jako relacji liniowo porządkującej (to znaczy spełniającej koniunkcję warunków: zwrotność, przechodniość, antysymetryczność i spójność). Gdyby założyć zwrotność, to byłaby ona relacją antysymetryczną, a zatem relacją porządkującą zbiór teorii matematycznych (relacja zwrotna, przechodnia i antysymetryczna – wówczas można by też mówić, że arytmetyka liczb rzeczywistych jest elementem największym w zbiorze teorii matematycznych. Ponieważ w zbiorze uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden taki element, byłaby to teoria wyróżniona, „podstawowa”). W niniejszej pracy zamiast nazwy „relacja porządkująca” (zbiór teorii matematycznych) wybrano jednak nazwę „relacja sprowadzania”. Powody są następujące:

1. Gdyby przyjąć pierwsze określenie to należałoby założyć zwrotność omawianej relacji.

2. Relacje określone tu jako „porządkujące” nazywa się czasem „częściowo porządkującymi”, zaś relacje nazwane wyżej „liniowo porządkującymi” nazywa się też „porządkującymi” [Por. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1973⁴, s. 127]. Określenie „relacja porządkująca” mogłoby być mylące, ze względu na zamieszanie terminologiczne w podstawowych opracowaniach podręcznikowych.

3. Termin „relacja sprowadzania” dobrze oddaje intuicję związane z omawianą relacją.

¹⁴ Znalezienie modelu liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych wymaga przyjęcia aksjomatu nieskończoności.

aczkolwiek przy zastosowaniu dość odmiennych metod, prawie jednocześnie około roku 1870, K. Weierstrass, R. Dedekind, Ch. Meray i G. Cantor¹⁵.

Realizacja drugiego etapu arytmetyzacji oznaczała równocześnie arytmetyzację geometrii Euklidesowej. Formalnie krok ten został uczyniony między innymi przez Cantora, kiedy przyjął on aksjomat, iż każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt w jednowymiarowej przestrzeni z metryką Euklidesową¹⁶. Właśnie w zakresie rozumienia istoty geometrii, pojawiły się jednak w dziewiętnastym wieku przeszkody, które – jak się początkowo wydawało – uniemożliwiały uznanie matematyki („matematyki z geometrią”) za jednolitą strukturę, której wszystkie gałęzie byłyby sprowadzalne do arytmetyki liczb naturalnych. Zacięte dyskusje nad istotą geometrii rozpoczęły się około roku 1870, gdy na skutek publikacji prac N. Łobaczewskiego, K. Gaussa i wygłoszenia słynnego wykładu inauguracyjnego przez B. Riemanna aktualna stała się sprawa geometrii nie-Euklidesowych. Tym niemniej już w tym samym roku F. Klein znalazł dla geometrii Łobaczewskiego i Riemanna modele Euklidesowe, co oznaczało arytmetyzację nowych teorii geometrycznych¹⁷.

Tym samym na początku lat siedemdziesiątych dziewiętnastego wieku, kiedy Cantor rozpoczął swoją działalność naukową, matematyka mogła być uważana za zwartą strukturę, uporządkowaną za pomocą relacji sprowadzania jednej teorii do drugiej. Funkcję teorii „podstawowej” pełniła arytmetyka liczb naturalnych. Innymi słowy: matematykę klasyczną, nawet uzupełnioną o nieklasyczne geometrie, można było wówczas uważać za zarytmetyzowaną¹⁸.

1.1.2. Stosunek Cantora do arytmetyzacji

Istnieją przesłanki pozwalające sądzić, że Cantor, podobnie jak wielu współczesnych mu kolegów, w ten właśnie sposób, jako zbiór teorii arytmetyzowalnych,

¹⁵ Dla uzupełnienia obrazu drugiego etapu arytmetyzacji analizy należałoby jeszcze dodać, że uzyskanie modelu liczb zespolonych w teorii liczb rzeczywistych było sprawą prostą. Od dawna operowano w matematyce modelem geometrycznym liczb zespolonych, w którym każdą liczbę zespoloną utożsamiano wzajemnie jednoznacznie z jednym punktem dwuwymiarowej przestrzeni Euklidesowej. Ponieważ każdemu punktowi takiej przestrzeni można było wzajemnie jednoznacznie przyporządkować parę uporządkowaną liczb rzeczywistych, zatem istniał model teorii liczb zespolonych w dziedzinie par uporządkowanych liczb rzeczywistych. Oznaczało to arytmetyzację teorii liczb zespolonych.

Zasadnicze wiadomości na temat arytmetyzacji matematyki w dziewiętnastym wieku zawarte są w pracy N. Bourbaki [Por. Bourbaki, dz. cyt., s. 35 – 37; por. też H. Meschkowski, *Ways of thought of great mathematicians*, trans. J. Dyer-Bennet, San Francisco 1966, s. 86-87].

¹⁶ Por. G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, 1872, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und Philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932, reprint Berlin, Heidelberg, New York 1980 = GA, s. 97- 98 (92- 102).

¹⁷ Por. F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. I, Berlin 1931, s. 254-305.

W zasadzie nieco wcześniej, w roku 1868, modele Euklidesowe dla geometrii nie-Euklidesowych znalazł pracujący poza środowiskiem matematyków niemieckich E. Beltrami [Por. E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, „Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane” 6 (1868), s. 284-312].

¹⁸ Konsekwencję takiego widzenia struktury matematyki stanowiło zwrócenie się po roku 1880 w kierunku badań podstaw arytmetyki liczb naturalnych. Jednym z efektów tych badań było podanie aksjomatyki teorii liczb naturalnych, najpierw przez R. Dedekinda w roku 1886 [Por. R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 3, Braunschweig 1932, s. 359-361; P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris 1976], a potem przez G. Peano w roku 1889 [Por. G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino 1889].

traktował matematykę.

1. Należał on do szkoły K. Weierstrassa, który wniósł najistotniejszy wkład w dzieło *systematyzacji* matematyki klasycznej.

2. Cantor sam istotnie przyczynił się do arytmetyzacji analizy, znajdując model teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych¹⁹. Poza tym wskazywał na potrzebę arytmetyzacji geometrii²⁰.

3. Sprzeciw Cantora wobec wielkości nieskończenie małych nabiera, w kontekście *systematyzacji* matematyki dziewiętnastego wieku, do pewnego stopnia nowego znaczenia. Skoro bowiem, dzięki pracom matematyków w ramach programu szkoły weierstrassowskiej, w których sam uczestniczył, udało się zarytmetyzować analizę, to pojęcie wielkości nieskończenie małych mogło wydać się zbędne. „niekompatybilne” względem struktury arytmetyzowalnej matematyki. Być może więc taki sposób widzenia matematyki był jedną z przyczyn negowania przez Cantora istnienia wielkości nieskończenie małych.

4. W pracach Cantora istnieją sformułowania, w których stwierdza on, że arytmetyka liczb naturalnych jest „podstawową” dziedziną matematyki²¹. Można przypuszczać – w kontekście tego, co powiedziano wcześniej o współczesnym mu dążeniu do *systematyzacji* matematyki – że „podstawowy” charakter tej teorii opierał się również w jego pojęciu na możliwości sprowadzenia doń każdej innej teorii uważanej za matematyczną.

Przedstawione argumenty pozwalają twierdzić, że Cantor, jeszcze przed „odkryciem” teorii mnogości, podobnie jak wielu matematyków mu współczesnych, traktował matematykę jako pewien zbiór teorii, który można było *usystematyzować* za pomocą relacji sprowadzania. Relacja ta była przechodnia i antysymetryczna²². Zbiór teorii miał jeden wyróżniony element, który stanowiła arytmetyka liczb naturalnych. Do niej była sprowadzalna każda teoria matematyki klasycznej²³.

¹⁹ W tym kontekście warto też wspomnieć, że Cantor świadomie domagał się, aby analiza matematyczna nie była oparta na żadnych intuicjach geometrycznych, lecz wyłącznie na podstawach arytmetycznych: „Ich glaube hier als bekannt voraussetzen zu können, daß eine allgemeine, rein arithmetische, d. h. von allen geometrischen Anschauungsgrundsätzen vollkommen unabhängige Größenlehre möglich ist und in ihrer Grundzügen auch ausgebildet ist; ich verweise in dieser Beziehung außer auf die zitierten, freilich nur sehr kurz gehaltenen Aufsätze von Dedekind und mir noch auf die ausgezeichnete Schrift des Herrn Lipschitz: Grundlagen der Analysis. Bonn 1877. Die meisten prinzipiellen Schwierigkeiten, welche in der Mathematik gefunden werden, scheinen mir ihren Ursprung darin zu haben, daß die Möglichkeit einer rein arithmetischen Größen- und Mannigfaltigkeitslehre verkannt wird”. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 3. 1882, w: GA, s. 156 (149-157).

²⁰ Zob. przypis 16.

²¹ „Der Zweck dieses Schriftens, die Grundlagen der Arithmetik einer erneuten Untersuchung zu unterwerfen, ist ein löblicher, denn es unterliegt keinem Zweifel, daß dieser Zweig der Mathematik, welcher allen anderen mathematischen Disziplinen zur Basis dient, eine weit tiefere Erforschung seiner Grundbegriffe und Methoden verlangt, als sie ihm bisher im allgemeinen zu Teil geworden ist”. G. Cantor, *Die Grundlagen der Arithmetik*. Rezension der Schrift von G. Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884, 1885, w: GA, s. 440 (440-442).

²² Jest kwestią konwencji, czy traktować tę relację jako relację zwrotną [zob. przypis 13]?

²³ We współczesnej teorii relacji stwierdza się, iż istnieje co najwyżej jeden taki element. Arytmetyka liczb naturalnych spełniała w tym wypadku kryteria elementu największego dziedziny teorii matematycznych z określoną relacją sprowadzania [zob. przypis 13].

1.2. *Ostensywne* określenie matematyki jako wymóg *systematyzacji* bez *unifikacji*

W perspektywie dalszych rozważań na temat kryteriów matematyczności teorii w ujęciu Cantora, należy zauważyć, że zaprezentowana koncepcja *systematyzacji* opierała się na pewnym istotnym założeniu. Aby twierdzić, że matematyka jest *systematyzowalna* za pomocą relacji sprowadzania, trzeba było uprzednio wiedzieć, które teorie są matematyczne. Innymi słowy: była tu już założona jakaś wiedza określająca, czym jest matematyka.

Co stanowiło podstawy tej wiedzy? Dla niniejszego opracowania nie jest specjalnie ważne odwoływanie się w tym miejscu do tekstów źródłowych, a raczej teoretyczna refleksja dotycząca natury ewentualnych źródeł wiedzy: którą teorię należy zaliczyć do matematyki? Możliwe wydają się dwa rozwiązania:

1. Istniały jakieś kryteria natury filozoficznej lub metodologicznej, określające którą teorię należy do matematyki, a którą nie. Sformułowanie tego typu kryteriów wymagałoby odwołania się do jakiejś formy ontologii lub określenia przedmiotu poznania matematyki, względnie określenia metody wyróżniających dyscypliny matematyczne.

2. Po prostu wskazywano: te i tylko te teorie należą do matematyki²⁴ Tym samym w środowisku matematyków mogło *de facto* dominować – milcząco przyjmowane – *ostensywne* kryterium matematyczności²⁵.

Pierwsze z podanych kryteriów wprowadzałyby jednak niejednoznaczność w zakres rozumienia tego, co jest matematyką. Brak zgody co do podstaw ontologicznych matematyki i sposobów poznania byłby w takim wypadku oczywistym powodem niejednoznaczności.

Natomiast przynajmniej przed wprowadzeniem teorii mnogości, wydawał się panować *consensus* dotyczący tego, jakie dyscypliny należą do matematyki. Skoro jednak w wyniku badań prowadzonych w dziewiętnastym wieku okazało się, że wszystkie dyscypliny, traktowane na mocy kryterium *ostensywnego* jako matematyczne, są sprowadzalne do arytmetyki liczb naturalnych, to czy ów fakt nie stanowił podstawy do sformułowania „nowego”²⁶ kryterium zaliczenia jakiejś teorii do matematyki?

Wyprzedzając późniejsze, szczegółowe analizy deklaracji Cantora głoszącej, że *czysta matematyka jest czystą teorią mnogości*, można na jej podstawie twierdzić,

²⁴ To rozwiązanie jest w jakiejś mierze sprowadzalne do pierwszego. Ostatecznie bowiem zaliczenie do matematyki takich a nie innych teorii mogło wynikać z pewnej tradycji. Jej źródło zaś mogło stanowić – nieznane matematykom dziewiętnastego wieku -kryterium filozoficzne.

²⁵ Ślady funkcjonowania *ostensywnego* kryterium matematyczności teorii są jeszcze dostrzegalne w tekstach Cantora, pochodzących z początku dwudziestego wieku: „Natürlich werde ich die ausführliche Darstellung meiner bisher unbekannt gebliebenen mathematischen Arbeiten aus den beiden letzten Dezennien Ihnen für die *Annalen* geben, wo ja auch meine Hauptarbeiten über die Mengenlehre vorher seit über 40 Jahren erschienen sind. Dies gehörte zum *ersten* Theil der Mengenlehre, die aus *drei* Theilen besteht. Der *zweite* (mit dem Continuumssatz, d.h. dem strengen Beweise, daß die Mächtigkeit oder Kardinalzahl eines Continuum = Aleph-eins ist) besteht aus den *Anwendungen* der im *ersten* begründeten Mengenlehre auf *Zahlentheorie*, *Geometrie* und *Analysis*, also auf das was wir die *reine Mathematik* nennen”. G. Cantor, *List to D. Hilbert* z 20.09.1912, w: W. Purkert, H. J. Ilgäus, *G. Cantor 1845-1918*, Basel, Boston, Stuttgart 1987, s. 229-230 (229-231).

Zatem *czysta matematyka* to: teoria liczb, geometria i analiza. Potem dołączono teorię mnogości, dyscyplinę „wyróżnioną”. „podstawową”.

²⁶ Jak pokażą dalsze rozważania, kryterium to w istocie zakładało wcześniejsze wprowadzenie kryterium *ostensywnego*.

że wcześniej, przed rozpoczęciem prac nad teorią mnogości, zarówno on, jak i przedstawiciele szkoły weierstrassowskiej – tak zasłużonej w dziele *systematyzacji* – przyjmowali, przynajmniej milcząco, jako kryterium matematyczności danej teorii jej sprowadzalność do arytmetyki liczb naturalnych²⁷.

1.3. Status logiczny *unifikacji* opartej na *systematyzacji*

Należy przeanalizować logiczną konstrukcję rozumowania, na mocy którego przynajmniej *implicite* przyjęto, jeszcze przed powstaniem teorii mnogości, nowe kryterium matematyczności teorii. Istniała pewna liczba teorii, które na mocy tradycji wskazywano jako matematyczne. Każda z nich, w efekcie dziewiętnastowiecznej *systematyzacji*, okazała się sprowadzalna do arytmetyki liczb naturalnych. Zatem można było sformułować sąd:

(a) Każda teoria na mocy kryterium *ostensywnego* „wskazana” jako matematyczna jest sprowadzalna do arytmetyki liczb naturalnych.

Aby sprowadzalność do arytmetyki liczb naturalnych wyznaczała ten sam zakres znaczeniowy terminu „matematyka” co dotychczasowe kryterium *ostensywne*, powyższy sąd winien był jednak posiadać charakter równoważności:

(b) Wszystkie teorie „wskazane” na mocy kryterium *ostensywnego* jako matematyczne i tylko one są sprowadzalne do arytmetyki liczb naturalnych²⁸.

Aby zasadnie, z logicznego punktu widzenia, przejść od zdania (a) do zdania (b) należało, jak się wydaje:

1'. Uzasadnić, że inne teorie, mogące ewentualnie pretendować do zaliczenia do matematyki²⁹ nie dają się sprowadzić do arytmetyki liczb naturalnych, czego – przynajmniej *explicite* – nie uczyniono.

Możliwe, przynajmniej teoretycznie, było też inne rozwiązanie:

2'. Przyjąć jako umowę, konwencję, że sprowadzalność do arytmetyki liczb naturalnych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym matematyczności teorii.

Takie stanowisko nie wykluczałoby jednak – z logicznego punktu widzenia – tego, iż zakres terminu „matematyka” byłby w tym wypadku szerszy niż w wypadku zastosowania kryterium *ostensywnego*.

Być może istnieje jednak jeszcze inne rozwiązanie, które może aproksymować stan świadomości uczonych drugiej połowy dziewiętnastego wieku w zakresie kryteriów matematyczności. Nie jest wykluczone, że uczeni – przynajmniej ze szkoły weierstrassowskiej – przyjmowali co najmniej dwa, oparte na różnych podstawach warunki zaliczenia teorii do matematyki:

a'. Warunek zawarty w przedłożeniach, nie zwerbalizowanych intuicjach uczonych dotyczących tego, co jest matematyką. Mógł on dotyczyć pewnych rozstrzygnięć ontologicznych, ewentualnie sposobów (metod) poznania.

²⁷ Z logicznego punktu widzenia *systematyzacja* matematyki winna być poprzedzona jej *unifikacją*, czyli określeniem, czym ona jest, co się *systematyzuje*. Ponieważ jednak kryteria *ostensywne* są z oczywistych względów niewygodne, zatem wprowadzona w dziewiętnastym wieku *systematyzacja* matematyki zastąpiła *ostensywne* kryterium *unifikujące*.

²⁸ Przyjęto tu założenie, że rozpatrywane są jedynie teorie znane w owym czasie. Formułowane kryterium było dla ówczesnych matematyków „otwarte” w tym znaczeniu, że gdyby powstała później jakaś inna teoria sprowadzalna do arytmetyki liczb naturalnych, zaliczyliby ją do matematyki. Co istotne, postąpiliby tak właśnie ze względu na jej sprowadzalność do arytmetyki liczb naturalnych.

²⁹ Intuicja mogła wskazywać w tym wypadku teorie o dużym stopniu „nasyceń” formalizmem, na przykład mechanikę.

b'. Sprowadzalność danej teorii do arytmetyki liczb naturalnych. Współcześnie można twierdzić, że warunek ów oparty był na pewnych mniej lub bardziej uświadomionych intuicjach metamatematycznych.

Być może faktycznie, choć *implicite* przyjmowano tezę, która następująco charakteryzowała współzależność obydwu warunków:

c'. obydwa są warunkami koniecznymi i wystarczającymi matematyczności jakiejś teorii i wyznaczają ten sam zakres znaczeniowy terminu „matematyka”, który pokrywa się z wcześniejszą definicją *ostensywną*.

Z praktycznego punktu widzenia warunki owe mogły spełniać różne funkcje. O ile, warunek b' w świadomości matematyków mógł posiadać charakter kryterium pozytywnego w tym sensie, że pozwalał wskazać, które teorie należą do matematyki, o tyle warunek a' pełniłby funkcję kryterium negatywnego, bowiem w praktyce mógł stanowić przesłankę fałsyfikującą przypuszczenie o matematycznym charakterze danej teorii.

Dlatego należy postawić następującą hipotezę, której ewentualne funkcjonowanie w koncepcji Cantora zostanie sprawdzone później.

1. Względy pragmatyczne przemawiały za tym, by jako kryterium matematyczności przyjmować, przynajmniej *implicite* koniunkcję warunków a' i b'.

2. Przy przyjęciu – bardzo mocnego skądinąd – założenia c', kryterium matematyczności ze względów logicznych redukowało się do warunku b'. Innymi słowy: założenie c', przyjmowane w drugiej połowie dziewiętnastego wieku chyba podświadomie przez wielu matematyków, pozwalało wyrazić kryterium matematyczności w kategoriach intuicji metamatematycznych, opartych na relacji sprowadzania.

W każdym razie, niezależnie od tego, na ile było to do końca zasadne – z logicznego czy pozallogicznego punktu widzenia – wydaje się prawdopodobne, że Cantor i matematycy wywodzący się ze szkoły K. Weierstrassa uważali za należące do matematyki te i tylko te teorie, które były sprowadzalne do arytmetyki liczb naturalnych. Prawdopodobnie towarzyszyło temu przekonanie, że nowe kryterium pokrywa się z wcześniejszym kryterium *ostensywnym*.

Z pewnością natomiast można stwierdzić, że Cantor traktował arytmetykę liczb naturalnych jako „podstawową” dyscyplinę matematyki nawet wówczas, kiedy jego badania teoriomnogościowe były już zaawansowane. Jeszcze około roku 1883 wykorzystywał wyniki arytmetyki liczb naturalnych przy „konstruowaniu” teorii pozaskończonych liczb porządkowych, którą uważał za – do pewnego stopnia – „naturalne rozszerzenie” dotychczasowej arytmetyki³⁰.

³⁰ „Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlenbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das unendliche hinaus; ... , kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die Feste Überzeugung aussprechen, daß diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen”. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883, w: GA, s. 165 (165-209).

To, która dyscyplina matematyki, arytmetyka liczb naturalnych czy teoria mnogości były traktowane przez Cantora jako „podstawowe”, służy czasem do wyodrębnienia dwu faz w jego badaniach teoriomnogościowych [Por. F. A. Medwedew, *Über die Abstrakten Mengenlehren von Cantor und Dedekind*, „Berichte zur Wissenschaftsgeschichte” 7 (1984) s. 195-200].

1.4. Dziewiętnastowieczne „podstawy” arytmetyki

Skoro arytmetyka liczb naturalnych – również dla Cantora, do jesieni roku 1884³¹ – była „podstawową” dyscypliną matematyki, trzeba ją było w jakiś sposób uprawomocnić. W drugiej połowie dziewiętnastego wieku proponowano w istocie trzy rozwiązania tego problemu:

1. Odwołanie się do filozofii w celu opisanie genezy podstawowego obiektu arytmetyki, to znaczy liczb naturalnej. Najczęściej odwoływano się – szczególnie od czasu rozpowszechnienia koncepcji I. Kanta – do intuicji czasu. Intuicja następstwa chwil w czasie miała dostarczać pojęcia liczby naturalnej jako powstałej przez gromadzenie się kolejnych jednostek.

2. Aksjomatyzację arytmetyki liczb naturalnych, która została podjęta i zrealizowana przez R. Dedekinda i G. Peano³².

3. Znaleźnienie dyscypliny, do której arytmetyka liczb naturalnych byłaby sprowadzalna, a więc nowej dyscypliny „podstawowej” matematyki.

Jak się wydaje, poglądy Cantora w pierwszej fazie jego badań teoriomnogościowych³³ wykazywały – mimo niechęci do filozofii I. Kanta – pewne podobieństwo do rozwiązania tradycyjnego, filozoficznego³⁴. Natomiast – co było

³¹ Zob. przypis 9.

³² Zob. przypis 18.

³³ Zob. przypis 30.

³⁴ Jeszcze w roku 1883, charakteryzując pierwszą zasadę generowania pozaskończonych liczb porządkowych Cantor pisał: „Die Reihe (I) der positiven realen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., v. ... hat ihren Entstehungsgrund in der wiederholten Setzung und Vereinigung von zugrunde gelegten als gleich angesehenen Einheiten Es beruht somit die Bildung der endlichen ganzen realen Zahlen auf dem Prinzip der Hinzufügung einer Einheit zu einer vorhandenen schon gebildeten Zahl...”. Cantor, dz. cyt., s. 195.

Trzeba jednak mocno podkreślić, że nawet wówczas Cantor nie dążył do oparcia matematyki (arytmetyki liczb naturalnych i geometrii) oraz mechaniki na kantowskich kategoriach czasu i przestrzeni [Por. T. Murata, *L'évolution des principes philosophico-mathématiques de la théorie des ensembles chez Georg Cantor*, w: *Proc. XIV Int. Congr. Hist. Sci.* 1974 (publ. 1975), 2, s. 133-136]. We wspomnianym artykule odrzucił on bowiem zdecydowanie taką możliwość [Por. Cantor, dz. cyt., s. 191-192]. Powodem jego krytyki kantowskich kategorii czasu i przestrzeni były między innymi wyniki przeprowadzonych badań topologicznych.

W tej samej pracy, lecz w części opublikowanej w roku 1882 [Por. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 3, w: GA, s. 149-157], Cantor rozpatrywał własności topologiczne zbioru M wszędzie-gęstego (w sensie Cantorowskim) w ciągłej dziedzinie A . Dziedzina A stanowiła dwuwymiarową przestrzeń Euklidesową, której każdy punkt był określony przez uporządkowaną parę liczb rzeczywistych $\langle x, y \rangle$. Natomiast zbiór M składał się z tych i tylko tych punktów płaszczyzny A , jakie wyznaczały uporządkowane pary liczb wymiernych $\langle x', y' \rangle$. Następnie Cantor zdefiniował nową przestrzeń $U = A - M$ i sformułował tezę stwierdzającą, iż dla dowolnych punktów N i N' należących do zbioru U istnieje linia ciągła l , łącząca punkty N i N' i zawierająca się całkowicie w zbiorze U .

Dowód tego twierdzenia oparty był na ciągłości łuku kołowego oraz na udowodnionej wcześniej przez Cantora nierównoliczności dwu nieskończonych zbiorów: zbioru liczb wymiernych, który jest policzalny oraz niepoliczalnego zbioru liczb rzeczywistych. Idea dowodu sprowadzała się do przeanalizowania zbioru wszystkich okręgów na płaszczyźnie A , do których należały punkty N i N' . Zbiór środków tych okręgów był identyczny z prostą g , prostopadłą do odcinka NN' i przechodzącą przez jego środek. Ponieważ prosta g , równoliczna ze zbiorem liczb rzeczywistych, stanowiła niepoliczalnie nieskończony zbiór punktów, oczywisty był wniosek, że rozpatrywany zbiór okręgów jest takiej samej mocy. Z kolei jedynie policzalnie nieskończenie wiele punktów ze zbioru M mogło leżeć na tych okręgach, ponieważ sam zbiór M był policzalnie nieskończony. A zatem – wnioskował Cantor – istnieje przynajmniej jeden łuk kołowy (ponieważ istnieje przynajmniej jeden taki okrąg), który łączy punkty N i N' i nie zawiera żadnego elementu ze zbioru M , czyli cały zawiera się w dziedzinie $U = A - M$.

charakterystyczne również dla K. Weierstrassa, głównego promotora arytmety-

Twierdzenie to mogło w prosty sposób zostać uogólnione na inne przypadki, w których dziedzina A była dowolną, n -wymiarową przestrzenią Euklidesową. Z filozoficznego punktu widzenia szczególnie interesująca sytuacja powstawała gdy $n = 3$, a więc dla zwykłej trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej, która zgodnie z założeniami mechaniki Newtonowskiej miała odwzorowywać świat zjawiskowy.

Cantor dostrzegł doniosłość filozoficzną udowodnionego twierdzenia i wykorzystał je do zakwestionowania przekonania o ciągłości przestrzeni świata fizycznego. Otóż – jego zdaniem – twierdzenie to dowodziło możliwości zachodzenia ruchów ciągłych w nieciągłych przestrzeniach typu U . Równocześnie wyrażał on pogląd, iż zdroworozsądkowe przekonanie o ciągłości przestrzeni fizycznej wynikało jedynie z możliwości obserwowania w niej ciągłych ruchów. Zatem – zdaniem Cantora – przekonanie o ciągłości tej przestrzeni było wyłącznie założeniem. Stanowiło ono supozycję, która jak twierdził: „musi być traktowana jako wolny akt naszej konstruktywnej aktywności. Hipoteza ciągłości przestrzeni jest stąd niczym innym, tylko przypuszczeniem – samym w sobie arbitralnym – o pełnej, wzajemnie jednoznacznej korespondencji między trójwymiarowym arytmetycznym *continuum* $\langle x, y, z \rangle$, a przestrzenią będącą podstawą zjawisk”. Cantor, dz. cyt., s. 156.

Zaprezentowany dowód oraz negowanie tezy o izomorfizmie *continuum* arytmetycznego i przestrzeni fizycznej miały swe dalsze konsekwencje w Cantorowskiej filozofii przyrody oraz filozofii matematyki.

1. Można było skonstruować inne przestrzenie, podobne do dziedziny U w tym sensie, że dopuszczały one ruch ciągły, a były tworzone przez „wyjęcie” z ciągłej przestrzeni jakiegoś wszędziegęstego zbioru. Powstawał wtedy problem, która z tak skonstruowanych przestrzeni jest najbardziej odpowiednia dla potrzeb mechaniki. Cantor nie wskazywał wprost żadnego rozstrzygnięcia. Twierdził natomiast, że w takiej sytuacji konieczne jest tworzenie nowych mechanik: $M_1, M_2, M_3, \dots$. Ich odmienność wynikałaby z przyjmowania odmiennych założeń, dotyczących topologicznych własności świata fizycznego. Zdaniem Cantora, studia dotyczące zrewidowanych, alternatywnych mechanik, mogły prowadzić do nowych, znaczących odkryć w fizyce. W każdym razie uznał on, że u podstaw mechaniki musi leżeć jakaś hipoteza dotycząca topologicznych własności przestrzeni fizycznej. [Por. J. Dadaczynski, *Elementy filozofii przyrody Georga Cantora*, „Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne” 23/24 (1990-91), s. 135-145].

2. Cantor, odrzucający *hipotetyzm* w kwestii wartości wyników uzyskiwanych w matematyce [zob. s. 73n], nie mógł przyjąć tezy, iż zbudowana jest ona (lub nawet jej część – geometria) na hipotetycznej intuicji dotyczącej własności przestrzeni, co w konsekwencji prowadziłoby do tego, że twierdzenia matematyki byłyby jedynie warunkowo prawdziwe. Dlatego Cantor wyrażał przekonanie, przeciwne do kantowskiego, iż to właśnie aprioryczna (według I. Kanta) forma przestrzeni jest wtórna w stosunku do pojęcia *continuum*: „Ebenso ist es meine Überzeugung, daß man mit der sogenannten *Anschauungsform des Raumes* gar nichts anfangen kann, um Aufschluß über das *Kontinuum* zu gewinnen. Da auch der *Raum* und die in ihm gedachten Gebilde nur mit Hilfe eines begrifflich bereits fertigen *Kontinuums* denjenigen Gehalt erlangen, mit welchem sie Gegenstand nicht bloß ästhetischer Betrachtungen oder philosophischen Scharfsinnes oder ungenauer Vergleiche, sondern nüchtern-exakter mathematischer Untersuchungen werden können”. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Nr 5, w: GA, s. 192.

Zupełnie podobnie wskazywał Cantor, że kantowska aprioryczna forma czasu jest wtórna względem pojęcia *continuum*. Tym samym, jak należy się domyślać, nie powinna pełnić – jak przyjęte to zostało w koncepcji I. Kanta – funkcji podstawy, z której można by wyprowadzić pojęcie liczby i w konsekwencji arytmetyki liczb naturalnych: „Zunächst habe ich zu erklären, daß meiner Meinung nach die Heranziehung des Zeitbegriffs oder der Zeitanschauung bei Erörterung des viel ursprünglicheren und allgemeineren Begriffs des Kontinuums nicht in der Ordnung ist; die Zeit ist meines Erachtens eine Vorstellung, die zu ihrer deutlichen Erklärung den von ihr unabhängigen Kontinuitätsbegriff zur Voraussetzung hat und sogar mit Zuhilfenahme desselben weder objektiv als eine Substanz, noch subjektiv als eine notwendige apriorische Anschauungsform aufgefaßt werden kann, sondern nichts anderes als ein Hilfs- und Beziehungsbegriff ist...”. Tamże, s. 191-192.

Natomiast w roku 1884 Cantor już wyraźnie odrzucał kantowskie stanowisko intuicjonistyczno-psychologizujące w zakresie podstaw arytmetyki liczb naturalnych: „Auch muß anerkannt werden, daß der Verf. den richtigen Gesichtspunkt erfaßt hat, indem er die Forderung aufstellt, daß sowohl die räumliche wie die zeitliche Anschauung und ebenso alle psychologischen Momente von den arithmetischen Begriffen und Grundsätzen ferngehalten sein müssen, weil nur auf diesem Wege ihre streng logische Reinheit ... gewonnen werden kann...”. Cantor, *Die Grundlagen der Arithmetik*. Rezension der Schrift von G. Frege *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884, s. 440.

zacji matematyki – nie przejawiał on zainteresowania „wyjaśnianiem” arytmetyki liczb naturalnych przez podanie jej aksjomatyki³⁵.

1.5. Unifikacja przez sprowadzenie do teorii mnogości

W roku 1884, w pracy, która została opublikowana dopiero w roku 1970³⁶, Cantor zmienił swój punkt widzenia deklarując, że *czysta matematyka* jest dla niego niczym innym, jak tylko *czystą teorią mnogości*. Istotnymi powodami takiej deklaracji były:

a. Przekonanie Cantora o możliwości arytmetyzacji całej dotychczasowej matematyki³⁷.

b. Określenie przez niego liczb naturalnych w kategoriach typów porządkowych.

Wspomniana praca zawiera definicję mocy zbioru i typu porządkowego. Typy porządkowe skończonych zbiorów prosto uporządkowanych były zdaniem Cantora niczym innym, jak skończonymi liczbami naturalnymi³⁸.

Dyscyplina, której podstawowym przedmiotem miało być pojęcie typu porządkowego, została nazwana przez Cantora „teorią typów”. Istotne dla analiz niniejszej pracy jest to, jak ujmował on relację pomiędzy teorią typów a arytmetyką liczb naturalnych, w kontekście możliwości zdefiniowania liczby naturalnej w kategoriach pierwszej z wymienionych teorii oraz relację między teorią typów a teorią mnogości.

Zdaniem Cantora arytmetyka liczb naturalnych była jedynie „względnie małą częścią”, „początkiem” lub „wprowadzeniem” do teorii typów porządkowych³⁹. Z kontekstu całego artykułu wynika, że najtrafniejsze było pierwsze z określeń. Pojęcie typu porządkowego zbioru dobrze uporządkowanego w szczególnym przypadku zbiorów skończonych prowadziło do pojęcia liczb naturalnych. Natomiast działania arytmetyki liczb naturalnych były szczególnym przypadkiem działań na typach porządkowych zbiorów skończonych. W tym znaczeniu arytmetyka liczb naturalnych stanowiła część teorii typów porządkowych zbiorów zarówno skończonych, jak i nieskończonych.

Wynika stąd, że teoria typów porządkowych była *logicznie pierwotna* w stosunku do arytmetyki liczb naturalnych. Analogicznie jak pojęcie typu porząd-

³⁵ Por. Bourbaki, dz. cyt., s. 37.

³⁶ Por. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, s. 84 [zob. przypis 9].

³⁷ To znaczy: „matematyki bez teorii mnogości”.

³⁸ „Jede *einfach geordnete Menge* hat nun einen bestimmten *Ordnungstypus* oder, wie ich mich auch kürzer ausdrücken will, einen bestimmten *Typus*; darunter verstehe ich denjenigen *Allgemeinbegriff*, unter welchem sämtliche der gegebenen geordn. Menge ähnliche geordnete Mengen, und nur diese, (folglich auch die gegebene geordnete Menge selbst) fallen. Die Typen der endlichen einfach geordneten Mengen sind nichts Anderes, als die *endlichen ganzen Zahlen*, in Zeichen: 1, 2, 3, ..., v....” Cantor, dz. cyt., s. 87.

³⁹ „Die *realen ganzen Zahlen* 1, 2, 3, ... bilden eine verhältnismäßig ganz kleine *Species* von *Gedankendingen*, welche ich *Ordnungstypen* oder auch schlichtweg *Typen* ... nenne; ... dementsprechend ist diejenige Disciplin, welche heute „*höhere Arithmetik*” (Theorie des nombres) genannt wird, nur ein *verhältnismäßig kleiner Bestandtheil*, oder, wenn sie wollen, der *Anfang* oder die *Einleitung* zu einer ihrer Anlage nach ausserordentlich weitreichenden und umfassenden Lehre, welche ich „*Theorie der Ordnungstypen*” (theoria typorum ordinalium) oder kürzer „*Typentheorie*” nenne”. Tamże, s. 84.

kowego zbioru dobrze uporządkowanego było *logicznie pierwotne* w stosunku do pojęcia liczby naturalnej.

Wypada jeszcze dodać, że określenie przez Cantora arytmetyki liczb naturalnych jako „początku” lub jako „wprowadzenia” do teorii typów porządkowych było w tym kontekście dość nieszczęśliwe. Zaciemniało bowiem jego intuicję o sprowadzalności arytmetyki liczb naturalnych do teorii typów porządkowych.

Sama zaś teoria typów porządkowych została określona przez Cantora jako „ważna i duża część *czystej teorii mnogości*”⁴⁰. W tym wypadku – jak się wydaje – termin „część” może być interpretowany dwojako:

1. Podobnie jak wyżej mogłoby to oznaczać, że *czysta teoria mnogości* jest logicznie wcześniejsza od teorii typów porządkowych. Teoria typów byłaby w tym wypadku oparta na wprowadzonych wcześniej przez *czystą teorię mnogości* pojęciach zbioru, należenia i podstawowych operacjach algebry zbiorów typu dodawanie.

2. Wydaje się bardziej prawdopodobne, że Cantorowi chodziło jednak o zakresowe rozumienie terminu „część”. Świadczą o tym późniejsze prace, w tytule których pojawiał się termin „teoria mnogości” („Mengenlehre”). Prezentowały one podobne zagadnienia i podobne rozwiązania co artykuł z roku 1884, zawierający teorię typów porządkowych⁴¹.

Nawet bez dalszej szczegółowej analizy problemu, która z dwu możliwości bardziej odpowiadała intencjom Cantora, można stwierdzić, że będąc przekonanym o możliwości arytmetyzacji matematyki (określonej *ostensywnie*) oraz o sprowadzalności arytmetyki liczb naturalnych do teorii mnogości, miał on prawo do konkluzji, iż *czysta matematyka* jest niczym innym, jak *czystą teorią mnogości*⁴². Bowiem – w jego przekonaniu – wszystkie teorie zaliczane wcześniej *ostensywnie* do matematyki były do niej sprowadzalne⁴³.

Zatem intencja wyrażona przez Cantora w analizowanym tekście jest następująca: matematyka to zbiór tych i tylko tych teorii, które są sprowadzalne do

⁴⁰ Zob. przypis 42.

⁴¹ Por. G. Cantor. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, 1895-97, w: GA, s. 282-356.

⁴² „Sie (die allgemeine Typentheorie – J.D.) bildet einen wichtigen und grossen Theil der reinen Mengenlehre (Theorie des ensembles), also auch der reinen Mathematik, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts anderes als reine Mengenlehre”. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, s. 84.

Należy zauważyć, że wypowiedź ta, aczkolwiek doniosła, bo wprowadzająca zupełnie nowe kryterium tego, czym jest matematyka, zawiera „błędne koło”. To właśnie dlatego matematyka mogła zostać określona jako teoria mnogości, ponieważ teoria typów była częścią teorii mnogości. Z wypowiedzi Cantora można by natomiast wnioskować, iż teoria typów dlatego stanowi część matematyki, ponieważ matematyka jest teorią mnogości.

Cantor nie miał do dyspozycji żadnych innych przesłanek niż przedstawione w tekście pracy, by uzasadnić sprowadzalność matematyki do teorii mnogości. Trudno ustalić przyczynę wspomnianego błędu. Być może powstał on dlatego, że Cantor położył w swej wypowiedzi nacisk na określenie tego, czym jest teoria typów.

⁴³ Ze względu na opór części środowiska matematyków wobec teorii mnogości, pokazanie, że dyscyplina ta jest *logicznie pierwotna* w stosunku do arytmetyki liczb naturalnych posiadało w pojęciu Cantora – jak można sądzić – istotny walor apologetyczny. Można bowiem odwrócić całe rozumowanie i stwierdzić, że skoro matematyka jest arytmetyzowalna, a arytmetyka liczb naturalnych może zostać sprowadzona do teorii mnogości, to tę ostatnią należy zaliczyć do matematyki.

teorii mnogości. Ponieważ kryterium to oparte jest na kategorii sprowadzalności, można je zatem określać jako „metamatematyczne”⁴⁴.

Podobnie jak wówczas, kiedy sądzono, że arytmetyka liczb naturalnych jest „podstawową” dyscypliną matematyczną, należało w tym miejscu zapytać, jak „uzasadnić” tezę teorii mnogości. Możliwe były – jak wcześniej – trzy rozwiązania tego zagadnienia⁴⁵.

Cantor nie szukał dyscypliny bardziej „podstawowej” ani nie próbował aksjomatyzować teorii mnogości. „Podstawy” teorii mnogości widział – jak pokazano wcześniej – w ontologii, która dostarczała mu intuicji dotyczących własności najistotniejszego pojęcia teorii mnogości – zbioru⁴⁶. Najważniejsze z nich są te, które później nazwano: „aksjomatem nieograniczonej komprehensji” oraz „aksjomatem ekstensjonalności”.

2. Metafizyczne kryterium matematyczności?

Jeśli potraktować analizowane stwierdzenie jako kryterium matematyczności – a taka była zapewne intencja Cantora – można formułować wobec niego – z logicznego punktu widzenia – te same zarzuty jak wobec wcześniejszego kryterium, opartego na możliwości arytmetyzacji wszystkich *ostensywnie* wskazanych teorii. Chodzi ponownie o to, czy warunek sprowadzalności teorii, tym razem do teorii mnogości, nie był zbyt szeroki⁴⁷. Zakładając, iż Cantor nie traktował stwierdzenia, że matematyka jest teorią mnogości jako konwencji, można pytać: czy dysponował on jakimś innym kryterium, nazwanym wcześniej „negatywnym”, które pozwoliłoby eliminować z zakresu matematyki teorie, nie wskazane wcześniej *ostensywnie* jako matematyczne?⁴⁸

Celem dalszych analiz będzie ukazanie, że Cantor takie negatywne kryterium usiłował podać. Próba taka miała miejsce w zasadzie już w roku 1873⁴⁹, a powtórzona została roku 1883⁵⁰, tuż przed podaniem kryterium pozytywnego – opartego na sprowadzalności danej teorii do teorii mnogości.

Aby zrozumieć istotę próby sformułowania kryterium negatywnego, należy odwołać się do Cantorowskiej tezy o izomorfizmie dwu sfer rzeczywistości: intrasubiektywnej i transsubiektywnej.

Najogólniej, pojęciom istniejącym w sferze intrasubiektywnej odpowiadały (wzajemnie jednoznacznie) zbiory obiektów w sferze transsubiektywnej. Wprowadzanie nowych pojęć do matematyki odbywało się przez ich definiowanie. Jedynym wymogiem stawianym definicjom była ich niesprzeczność. To

⁴⁴ W istocie Cantor miał jedynie podstawy do wygłoszenia tezy: jeśli jakaś teoria zaliczona jest na mocy kryterium *ostensywnego* do matematyki, to jest sprowadzalna do teorii mnogości [zob. s. 58]. Status logiczny kryterium metamatematycznego będzie analizowany w dalszej części niniejszej pracy [zob. s. 65-71].

⁴⁵ Zob. s. 60.

⁴⁶ Świadczy o tym również układ „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre”, pracy, w której Cantor starał się w sposób uporządkowany przedstawić swoją teorię mnogości. Rozpoczyna się ona od krótkiej, wyrażonej w terminologii filozoficznej charakterystyki zbioru [Por. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, w: GA, s. 282].

⁴⁷ Zob. s. 58n.

⁴⁸ Chodzi zatem o sprawdzenie hipotezy sformułowanej na s. 59.

⁴⁹ Zob. przypis 59.

⁵⁰ Zob. przypisy 51, 52.

w zupełności gwarantowało istnienie definiowanego pojęcia w sferze intrasubiektywnej. Matematyka nie interesowała – ze względu na założony izomorfizm obydwu sfer rzeczywistości – czy nowemu pojęciu odpowiadało cokolwiek w sferze transsubiektywnej.

W tym sensie matematyka była według deklaracji Cantora „wolna”. Wolność stanowiła według niego istotę matematyki. Została ona bliżej scharakteryzowana jako „wolność od stałej metafizycznej kontroli”⁵¹ lub też „wolność od wszelkich metafizycznych pęt”⁵². Zatem inne teorie należało poddawać stałej „kontroli metafizycznej”. Były one – jak pisał Cantor – „metafizyczne zarówno w swych podstawach, jak i celach”⁵³. Tak brzmiały różne sformułowania drugiego kryterium matematyczności Cantora. Kryterium to dzieliło zbiór nauk⁵⁴ na dwa podzbiory: nauk niemetafizycznych (= *matematyka czysta*⁵⁵) oraz metafizycznych (= *matematyka stosowana*⁵⁶).

2.1. Metafizyka jako ontologia

Dokładniejsze zrozumienie istoty drugiego kryterium matematyczności Cantora wymaga refleksji nad znaczeniem, jakie wiązał on z terminem „metafizyka”. Wydaje się, że w jego pismach można wyróżnić dwa znaczenia.

W pierwszym znaczeniu metafizyka jest ontologią, to znaczy nauką o tym, co istnieje, o świecie takim, jakim jest, a nie takim, jakim nam się ukazuje. Taka charakterystyka metafizyki została przedstawiona przez Cantora w roku 1913⁵⁷.

Gdyby przyjąć takie znaczenie terminu „metafizyka”, wówczas można by wobec niektórych przynajmniej sformułowań drugiego kryterium matematyczności wysunąć istotne zastrzeżenia. Matematyka – w ujęciu Cantora – nie była przecież „wolna od wszelkich metafizycznych pęt” i była w pewien sposób „metafizyczna w swych podstawach” z co najmniej dwu powodów:

⁵¹ „Wären Gauß, Cauchy, Abel, Jakobi, Dirichlet, Weierstraß, Hermite und Riemann verbunden gewesen, ihre neuen Ideen stets einer metaphysischen Kontrolle zu unterwerfen, wir würden uns fürwahr nichts des großartigen Aufbaues der neueren Funktionentheorie zu erfreuen haben, der obgleich völlig frei und ohne transiente Zwecke entworfen und errichtet, dennoch schon jetzt in Anwendungen an Mechanik, Astronomie und mathematische Physik seine transiente Bedeutung, wie nicht anders zu erwarten war, offenbart...”. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, w: GA, s. 183.

⁵² „So berechtigt daher die Mathematik ist, sich durchaus frei von allen metaphysischen Fesseln zu bewegen, vermag ich doch andererseits der „angewandten“ Mathematik, wie beispielsweise der analytischen Mechanik und der mathematischen Physik dasselbe Recht nicht zuzugestehen; diese Disziplinen sind m.E. in ihren Grundlagen sowohl, wie in ihren Zielen metaphysisch...”. Tamże.

⁵³ Zob. przypis 52.

⁵⁴ Z pewnością nie chodziło Cantorowi o wprowadzenie podziału zupełnego wszystkich nauk. Podany plan nie uwzględniał specyfiki nauk nazywanych „humanistycznymi”. W istocie Cantor cały czas starał się podać kryterium demarkacji pomiędzy naukami matematycznymi a naukami przyrodniczymi.

⁵⁵ Zob. przypis 9.

⁵⁶ Zob. przypisy 52, 71.

⁵⁷ W szkicu do pracy „Über den Zusammenhang der Mengenlehre mit der Arithmetik” (nigdy nie napisanej) Cantor zanotował: „Ohne ein Quentchen Metaphysik läßt sich meiner Überzeugung nach, keine exacte Wissenschaft begründen. ... Metaphysik ist, wie ich sie auffasse, die Lehre vom Seienden, oder dasselbe bedeutet vom dem was *da ist*, d. h. existirt, also von der Welt wie sie an sich ist, nicht wie sie uns erscheint. Alles was wir mit den Sinnen wahrnehmen und mit unserm abstracten Denken uns vorstellen ist *Nichtseiendes* und damit höchstens eine Spur des an sich Seienden”. Cantor, w: H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967, s. 114.

a. aby uzasadnić istnienie liczb całkowitych skończonych i pozaskończonych, Cantor odwoływał się do ontologicznej zasady izomorfizmu rzeczywistości transsubiektywnej i intrasubiektywnej.

b. nawet przed stwierdzeniem, że matematyka jest teorią mnogości, posługiwał się on w swych badaniach matematycznych pojęciem zbioru, które opisywał w kategoriach ontologicznych i utożsamiał z ideą Platona⁵⁸.

Skoro metafizyka, rozumiana jako ontologia, stanowiła zawsze dyscyplinę, na której matematyka – według Cantora – była oparta, bowiem dostarczała jej intuicji podstawowych pojęć, należy odwołać się do drugiego znaczenia terminu „metafizyka” w jego pismach.

2.2. Metafizyka jako filozoficzna krytyka nauki

Znaczenie to zostało przez Cantora wprowadzone w szkicu historycznym z roku 1873 na temat rachunku prawdopodobieństwa.

W drugim ujęciu metafizyka jest filozoficzną krytyką tych wszystkich nauk, jakie zawierały „pojęcia i podstawowe twierdzenia nie ukształtowane spontanicznie i niewartościowalne matematycznie, które to pojęcia rościły sobie pretensje do pewnej realnej ważności”⁵⁹.

Skoro Cantor, charakteryzując różnice pomiędzy *matematyką czystą* a *stosowaną*, twierdził, że metafizyka ma pełnić funkcje kontrolne wobec tej drugiej, to należy sądzić, iż w tym wypadku operował drugim znaczeniem terminu „metafizyka”. Jeśli – najogólniej rzecz biorąc – uważał on *matematykę czystą* za niemetafizyczną, a pozostałe dyscypliny naukowe określał jako „metafizyczne”, to trzeba w tym miejscu poddać dokładniejszej analizie drugie znaczenie terminu „metafizyka”. Wypada sądzić, że w ten sposób uda się zrekonstruować Cantorowską próbę określenia negatywnego kryterium matematyczności.

⁵⁸ Zob. przypis 100.

⁵⁹ „Ich darf jedoch ein Moment nicht unerwähnt lassen, welches wesentlich zu unserer Wissenschaft (zur Wahrscheinlichkeitsrechnung – J.D.) gehört, ich meine ihre philosophische Begründung – die Franzosen nennen es die Metaphysik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Jede Wissenschaft, welche sich wie die unsrige auf Begriffe und Grundsätze stützt, die nicht bloß spontan gebildet und mathematisch verwertet werden, sondern auch eine gewisse reale Gültigkeit in Anspruch nehmen, so daß die Resultate der Rechnung eine Anwendung auf die Wirklichkeit erhalten sollen, jede derartige Wissenschaft erfordert nach Inhalt und Umfang eine philosophische Kritik. ... Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat also stets und besonders, wenn ihr ein neues Feld der Anwendung gegeben wird, eine Erörterung nötig, worin die Gültigkeit ihrer Berechnungen genau festgestellt wird”. Cantor, *Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1873, w: GA, s. 365 (357-367).

Na drugie znaczenie, które wiązał Cantor z terminem „metafizyka”, zwrócił uwagę A. Fraenkel: „Das Wort „Metaphysik” hat übrigens für Cantor (ähnlich wie für Gauß) oft nicht die heute übliche Bedeutung, sondern in Anlehnung an den französischen Sprachgebrauch etwa den Sinn „philosophische Kritik” (einer Wissenschaft)...”. A. Fraenkel, *Das Leben Georg Cantors*, w: GA, s. 480 (452-483).

Spostrzeżenie A. Fraenkla zostało zanegowane przez H. Meschkowskiego: „Wir glauben nicht, daß Fraenkel in seiner CANTOR-Biographie Recht hat, wenn er „Metaphysik” bei Cantor als „philosophische Kritik (einer Wissenschaft)” deutet. Aus dem Briefwechsel des Gelehrten geht hervor, daß er das Wort „Metaphysik” durchaus im traditionellen Sinne verstand”. H. Meschkowski, *Aus den Briefbüchern Georg Cantors*, vorgelegt von J. E. Hofmann, „Archive for History of Exact Sciences” 4 (1965) vol. 2, s. 508 (503-519).

Dalsze rozważania mają pokazać, że rację miał jednak A. Fraenkel, który twierdził, że termin „metafizyka” ma w pismach Cantora dwojakie znaczenie. Inna sprawa, że Cantor czasami – jak się wydaje – mieszał obydwa znaczenia tego terminu [zob. przypis 104].

Sugestie Cantora, pochodzące z roku 1873, a więc stosunkowo wczesnego okresu jego aktywności naukowej, wiążą metafizykę z niektórymi przynajmniej dyscyplinami naukowymi. Każdej ze zbioru takich nauk przyporządkowana jest odpowiednia metafizyka. Cantor nazywa ją (albo cały zbiór metafizyk) inaczej „filozofią krytyczną”. Bardzo istotna jest też wskazówka, że chodzi o znaczenie terminu „metafizyka” wypracowane w tradycji francuskiej⁶⁰.

Te przesłanki pozwalają przyjąć – jako sąd dobrze uzasadniony – iż Cantor w tym wypadku odwoływał się do tego znaczenia słowa „metafizyka”, które zaczęło się kształtować w pierwszej formacji pozytywizmu francuskiego, w środowisku skupionym wokół J. d’Alemberta. Metafizykę związane tam z naukami twierdząc, że jest ona rodzajem nauki drugiego stopnia. Przy czym to określenie metafizyki jako „nauki drugiego stopnia” mogło być rozumiane co najmniej dwojako:

a. metafizyka jest nauką korzystającą z wyników opracowanych przez inne nauki – rodzajem syntezy nauk,

b. metafizyka jest nauką o zasadach nauk.

Jeśli by metafizyce w znaczeniu b. przyporządkować funkcję nie tylko opisową czy encyklopedyczną, ale także normatywną, to tak rozumiana metafizyka mogłaby być słusznie nazywana „filozofią krytyczną (nauk)”.

Cantor – jak się wydaje – dość swoiście zinterpretował krytyczną funkcję tak rozumianej metafizyki. Przynajmniej w analizowanych tekstach z roku 1873 oraz z roku 1883 nie twierdził on, że jej zadaniem jest podawanie i uzasadnianie norm uprawiania nauki. Metafizyka była w jego ujęciu nauką drugiego stopnia, meta-nauką⁶¹, ponieważ służyła ocenie, wartościowaniu pojęć i niektórych twierdzeń (nazywanych „podstawowymi”) pojawiających się w nauce⁶².

2.3. Funkcje metafizyki jako metanauki

Dla dalszych rozważań, mających na celu dokładniejszą rekonstrukcję Cantorowskiego rozumienia terminu „metafizyka” i w konsekwencji kryterium matematyczności teorii, ważne będzie ustalenie, jakie pojęcia winny być poddawane krytycznej ocenie metafizyki? Tekst z roku 1873 pozwala ustalić dwa warunki, które pojęcia owe musiały spełniać:

a. Są to pojęcia, które nie zostały spontanicznie utworzone i nie mogły być matematycznie wartościowane (ocenione).

b. Są to jednocześnie pojęcia, którym – według Cantora – chciano przypisać pewną „realną wartość”. Należy to stwierdzenie rozumieć w ten sposób, że były to pojęcia, o których sądzono, że odpowiadają jakiemuś przedmiotowi (przedmiotom, zbiorowi przedmiotów) w Cantorowskiej sferze transsubiektywnej⁶³.

Warunek a. oznaczał dla Cantora – jak należy sądzić – tyle, że w pewnych naukach funkcjonują pojęcia, których nie da się sprowadzić do pojęć matematycznych. Znaczy to, że nie można ich zdefiniować za pomocą pojęć matematycznych. Zatem ich wprowadzenie do nauki należy do zadań metafizyki, filozofii krytycznej. Dokonuje się to przez jakieś – bliżej przez Cantora nie określone – uzasadnienie, że pojęciom takim odpowiada korelat w rzeczywistości trans-

⁶⁰ Zob. przypis 59.

⁶¹ W tym znaczeniu metafizyka była metanauką w relacji do fizyki.

⁶² Zob. przypis 59.

⁶³ Zob. przypis 59.

subiektywnej. Innymi słowy: pojęcia spełniające warunek a. mogły być zasadnie wprowadzone do nauki tylko wtedy, gdy za pomocą bliżej nie sprecyzowanych metod metafizyki potwierdzono, iż sąd wyrażony w warunku b. jest zasadny.

Przeprowadzone badania pozwalają precyzyjnie sformułować negatywne, metafizyczne kryterium matematyczności⁶⁴ Cantora: teoria posługująca się chociażby jednym pojęciem, którego nie można sprowadzić do pojęć matematycznych, nie należy do matematyki.

Jeśli tak rozumieć sugestie Cantora z roku 1873, to metafizyka w drugim znaczeniu byłaby dla niego metanauką, której istotną funkcją jest:

1. Ustalenie, czy pojęciom niedefiniowalnym za pomocą pojęć występujących w matematyce odpowiada korelat w rzeczywistości transsubiektywnej.

2. W konsekwencji również rodzaj uzasadnienia – przez bliżej nieokreślone poznanie „stanu rzeczy” w rzeczywistości transsubiektywnej – „podstawowych twierdzeń” (według terminologii Cantora), w których występują scharakteryzowane wyżej pojęcia.

3. Na podstawie dokonanych ustaleń 1. i 2. wprowadzenie wymienionych pojęć i twierdzeń do nauki⁶⁵.

⁶⁴ Zob. s. 65.

⁶⁵ Przykład stanowi wprowadzenie pierwszych pojęć i twierdzeń, które legły u podstaw tzw. „Cantorowskiej hipotezy świata” [Por. H. Meyer, *Über einige naturphilosophische Diskussionen im Zusammenhang mit der Begründung der Mengenlehre durch Georg Cantor*, „Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität. Mathematisch-naturwissenschaftliche Reihe” 32 (1983) Heft 3, s. 301-304; P. Marnitz, *Zum Verhältnis der Unendlichkeitsbegriffe bei Friedrich Engels und Georg Cantor*, „Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität. Mathematisch-naturwissenschaftliche Reihe” 26 (1977) Heft 1, s. 103-104]. Do zadań metafizyki należało w tym wypadku:

1. Ustalenie, że pojęciom atomu materialnego i atomu eterycznego odpowiadają byty (precyzyjniej: zbiory bytów) istniejące w rzeczywistości transsubiektywnej.

2. Ustalenie własności tych bytów, które potem miały zostać opisane w podstawowych twierdzeniach teorii:

a. atomy eteryczne wypełniają całą przestrzeń, która nie jest zajęta przez atomy materialne.

b. miara promienia atomów obydwu typów jest bliska zeru, zaniedbywalna.

3. Uzasadnienie (rodzaj metarefleksji), że tezy 1, 2a i 2b są na tyle wiarygodne, iż pojęcia opisane w tezie 1 oraz same tezy 2a i 2b mogą zostać wprowadzone do nauki. Jak świadczy omawiany przykład, posiadały one – w pojęciu Cantora – status hipotez.

Można dodać kolejny etap, który najprawdopodobniej zostałby przez Cantora również sklasyfikowany jako zadanie filozofii krytycznej. Chodzi tu o uzasadnienie hipotezy stwierdzającej izomorfizm zbioru wszystkich atomów, a więc przestrzeni fizycznej z trójwymiarową przestrzenią Euklidesową. W ten sposób Cantor tworzył przesłanki, dla zbudowania modelu matematycznego (topologicznego) teorii fizycznej.

Wypada jeszcze wyjaśnić istotę wspomnianej wyżej „Cantorowskiej hipotezy świata”. Zainteresowania twórcy teorii mnogości nie ograniczały się do wysoce abstrakcyjnej, pozaskończonej teorii zbiorów. Twierdził on, że możliwości zastosowania niektórych idei teoriomnościowych poza matematyką były zawsze doniosłym stimulatorem jego badań: „Eine der wichtigsten Aufgaben der Mengenlehre, welche ich der Hauptsache nach in der Abhandlung „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883” gelöst zu haben glaube, besteht in der Forderung, die verschiedenen Valenzen oder Mächtigkeiten der in der Gesamtnatur, soweit sie sich unserer Erkenntnis aufschließen, vorkommenden Mannigfaltigkeiten zu bestimmen; dazu bin ich durch die Ausbildung des allgemeinen *Anzahlbegriffs wohlgeordneter Mengen* oder, was dasselbe bedeutet, des *Ordnungszahlbegriffs* gelangt”. Cantor, *List do K. Laßwitz* z 15.02.1884, w: *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, 1887-88, w: GA. s. 387-389 (378-439) [Korespondencja Cantora z K. Laßwitzem została opracowana w artykule: W. Eccarius, *Georg Cantor und Kurt Laßwitz. Briefe zur Philosophie des Unendlichen*, „NTM. Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin” 22 (1985) Heft 1, s. 29-52.

Jak rozumiał Cantor możliwość zastosowania swoich koncepcji teoriomnościowych w naukach przyrodniczych? Przede wszystkim był on krytycznie ustosunkowany do założeń tkwiących u

Wypada przypomnieć, że nauki, których dotyczyły opisane czynności, zostały przez Cantora nazwane „metafizycznymi”. *Matematyki czystej* nie zaliczył on do nauk metafizycznych. Właśnie to miało odróżniać ją w istotny sposób od pozostałych nauk⁶⁶.

podstaw fizyki oraz innych nauk przyrodniczych. Twierdził, że szczególnie te, które dotyczyły budowy materii były niewyraźne i nieprecyzyjne. Albo uprawiano nauki przyrodnicze bez jakichkolwiek podstawowych założeń, określających fizyczną konstytucję materii, albo przyjmowano istnienie atomów, korpuskuł materialnych o minimalnych rozmiarach i dlatego rozciągłych w przestrzeni.

Zdaniem Cantora, dla rozwinięcia satysfakcjonującej teorii, dobrze tłumaczącej zjawiska natury, konieczne było przyjęcie dwu fundamentalnych hipotez. Pierwsza głosiła, że zbiór wszystkich cząsteczek materialnych jest nieskończony. Według drugiej należało traktować podstawowe elementy materii jako nierozciągle punkty przestrzenne, ponieważ ich rozmiary w stosunku do wielkości przestrzeni są zaniedbywalne. Przyjęcie takich założeń umożliwiało – według Cantora – bezpośrednią aplikację wypracowanych przez niego twierdzeń teoriomnogościowych do nauk przyrodniczych.

Sugerował on, że przekonał się do przedstawionej wyżej koncepcji podstawowych form materii dzięki lekturze takich autorów, jak M. Faraday, A. Ampere, W. E. Weber i A. Cauchy. Tym niemniej zasadnicza inspiracja stała się jawna dzięki przyjęciu przez niego charakterystycznej terminologii. Elementarne składniki materii, które utożsamiał z nierozciągłymi jednostkami, porównywalnymi z materialnymi punktami, nazwał „monadami”. Jak się wydaje, to właśnie *monadologia* G. W. Leibniza stała się istotną inspiracją Cantorowskiej wizji zastosowania teorii mnogości w naukach przyrodniczych.

Następny krok uczyniony przez Cantora wskazywał, że jego monadologia pozostawała w ścisłym związku z paradygmatem dziewiętnastowiecznej fizyki. Uznał on bowiem dychotomię w świecie monad, przyjmując zarówno istnienie monad materialnych, jak i eterycznych. Najistotniejsze na tym etapie było dla Cantora określenie mocy dwu rozłącznych zbiorów monad. Przyjął on kolejne założenie, które zwykło się nazywać „Cantorowską hipotezą świata”. Otóż ogół wszystkich monad materialnych istniejących we wszechświecie miał konstituować zbiór nieskończony, ale policzalny, o mocy $\aleph_0$. Zaś zbiór wszystkich monad eterycznych był niepoliczalnie nieskończony, o mocy *continuum*, a więc „bogatszy” w elementy. Taka hipoteza była uprawdopodobniona – według Cantora – dzięki udowodnionemu przez niego twierdzeniu, że nieskończonym zbiorom punktów w przestrzeni Euklidesowej o dowolnym wymiarze przysługiwały jedynie dwie moce, odpowiadające dwom liczbom kardynalnym: $\aleph_0$ i *continuum*.

Podobnie dowolne ciało fizyczne, będące zbiorem monad materialnych, można było traktować jako zbiór punktów P. Zbiór ten – na podstawie Cantorowskiej hipotezy – był mocy $\aleph_0$, natomiast eteryczne monady zajmujące taką samą przestrzeń, tworzyły zbiór Q o mocy *continuum*. Cantor, odwołując się do przyjętej wcześniej techniki *dekompozycji* zbiorów, dokonał rozłącznego podziału zbiorów P i Q [Por. Dańdaczynski, dz. cyt., s. 140-141. W artykule tym podane zostały szczegóły dotyczące *dekompozycji* zbiorów, opartej na wprowadzonych przez Cantora pojęciach *adherencji*, *koherencji* i *inherencji* zbioru].

Zdaniem Cantora, dokonany podział zbiorów monad eterycznych i materialnych stanowił wystarczającą podstawę dla wytłumaczenia wielu własności materii. Sugerował on, że będzie możliwe dotarcie do istoty takich zjawisk, jak elektryczność, magnetyzm, światło, a także uchwycenie różnic w składzie i własnościach chemicznych poszczególnych ciał [Por. G. Cantor, *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n, Zweite Mittheilung*, 1885, w: GA, s. 275-276 (261-277). Sformułowane tam zostały najistotniejsze tezy omawianej „hipotezy świata”].

Wizja Cantora obejmowała zatem koncepcję stworzenia *teorii unitarnej*. Teorii, dzięki której można by połączyć poszczególne dyscypliny fizyki i chemii. Podstawą i uniwersalnym językiem jednoczącej teorii miała być teoria mnogości. Można – jak się wydaje – doszukiwać się w takim pomysle tęsknot G. W. Leibniza za stworzeniem uniwersalnego języka, *mathesis universalis*, który, niejako automatycznie, tłumaczyłby powstające w różnych naukach problemy.

⁶⁶ Zob. s. 65 i przypis 52.

2.4. Ocena wartości kryterium metafizycznego

Ze względów logicznych nie można jednak bezkrytycznie zaakceptować wprowadzonej przez Cantora kategorii metafizyczności czy niemetafizyczności (danej nauki, teorii) jako kryterium matematyczności. W jego wypowiedziach charakteryzujących metafizykę i nauki metafizyczne (nauki poddane opisanej kontroli metafizyki) można bowiem stwierdzić istnienie „błędnego koła”. Nauki te zostały wyodrębnione na podstawie opisanej relacji do metafizyki, a metafizyka określona właśnie przez swą funkcję wobec nauk metafizycznych.

Tym niemniej wydaje się, że analizowane teksty zawierają jakąś intuicję kryterium matematyczności. Celem dalszych rozważań będzie ujawnienie owej intuicji i wskazanie, w jakiej relacji pozostaje ona do kryterium metamatematycznego, opartego na kategorii sprowadzalności.

Analiza warunku a.⁶⁷ ujawniła, że:

(1) jeśli w jakiejś teorii występuje przynajmniej jedno pojęcie niedefiniowalne za pomocą pojęć matematycznych, to teoria ta nie należy do matematyki⁶⁸.

Równoważna jest następująca postać tej tezy:

(2) jeśli teoria należy do matematyki, to każde jej pojęcie można zdefiniować za pomocą innych pojęć matematycznych.

W zasadzie teza ta posiada charakter tautologii i jako taka nie posiada żadnej wartości poznawczej. Jeżeli jednak przypomni się, że jeszcze przed rokiem 1873 przeprowadzona została arytmetyzacja matematyki (rozumianej *ostensywnie*) to nie jest wykluczone, że teza (2), a w konsekwencji teza (1) miała wyrażać następującą intuicję:

(3) jeśli teoria należy do matematyki (rozumianej *ostensywnie*), to da się ją sprowadzić do arytmetyki liczb naturalnych. Po roku 1884 następnik tej implikacji przybrałby postać: teoria ta da się sprowadzić do teorii mnogości.

Zatem wnioski z przeprowadzonych badań, dotyczących poszukiwanego, drugiego kryterium matematyczności Cantora – jeśli przyjąć poprawność rozumowania prowadzącego do tezy (3) – są następujące:

1. Kryterium to tylko pozornie oparte jest na kategoriach filozoficznych (metafizycznych, w akceptowanych przez Cantora znaczeniach). W rzeczywistości odwołuje się ono do metamatematycznej kategorii sprowadzalności jednej teorii matematycznej do teorii bardziej „podstawowej”.

2. Dlatego w istocie kryterium metafizyczne jest tożsame z metamatematycznym kryterium matematyczności, które zostało ujawnione w trakcie prowadzonych analiz⁶⁹. Zakłada wcześniejsze, *ostensywnie* określenie tego, jakie teorie należą do matematyki.

3. Analizowane kryterium zostało podane w formie negatywnej. Jego sformułowanie jest operatywne w tym znaczeniu, że ujawnienie w danej teorii choćby jednego pojęcia, którego nie można zdefiniować za pomocą pojęć należących do matematyki (rozumianej *ostensywnie*), pozwala stwierdzić, że jest ona niematematyczna. Jeśli zastosowany jest w niej pojęciowy aparat matematyczny (w jakim zakresie?), można ją zaliczyć do *matematyki* (teorii mnogości) *stosowanej*.

⁶⁷ Zob. s. 67 n.

⁶⁸ Teoria ta jest „poddana kontroli metafizycznej” [zob. przypis 51].

⁶⁹ Zob. przypis 44.

Inną sprawą jest, że Cantor nigdzie nie określił algorytmu: jak rozstrzygnąć, czy dane pojęcie jest, czy nie jest definiowalne za pomocą pojęć matematycznych?

Zatem w wyniku przeprowadzonych badań okazało się, że Cantor tylko pozornie posługiwał się drugim, metafizycznym kryterium matematyczności teorii.

Otwarty pozostaje dalej problem, jak na podstawie wypowiedzi Cantora znaleźć uzasadnienie dla przypuszczenia, że sprowadzalność teorii do teorii mnogości – z logicznego punktu widzenia – mogła zasadnie przejąć funkcję *ostensywnego* kryterium matematyczności. To znaczy: czy i jak eliminował on dopuszczalną z logicznego punktu widzenia możliwość, że sprowadzalność do teorii mnogości mogła wyznaczać szerszy zakres terminu „matematyka” niż kryterium *ostensywne*?⁷⁰

Jak zaznaczono, Cantor stwierdził w roku 1884, że *czysta matematyka jest czystą teorią mnogości*. Zaraz potem podał cały szereg dyscyplin naukowych, które zaliczył do *stosowanej teorii mnogości*, a wcześniej zaliczał do matematyki stosowanej⁷¹. Z drugiej strony właśnie one stanowiły zbiór teorii, odnośnie do których najbardziej zasadnie można było postawić pytanie: czy nie dają się one sprowadzić do teorii mnogości? Skoro Cantor zdecydowanie zaliczył je do *stosowanej teorii mnogości*, oznacza to, że na postawione pytanie odpowiedziałby negatywnie. Być może – czego jednak nie ujawnił – przeanalizował niektóre pojęcia tych teorii, stwierdzając, że są niedefiniowalne (niesprowadzalne) w kategoriach matematyki wyznaczonej *ostensywnie* – a zatem i teorii mnogości. Jedynie zaprezentowane tu rozumowanie stanowi przesłankę, na podstawie której Cantor mógł zasadnie uznać, że pojęcie matematyki określonej jako zbiór tych i tylko tych teorii, które były sprowadzalne do teorii mnogości, miało ten sam zakres znaczeniowy co pojęcie matematyki wyznaczonej tradycyjnie, *ostensywnie*, oczywiście wraz z teorią mnogości.

3. Metoda wyróżnikiem matematyki?

Szukając w tekstach Cantora dodatkowego kryterium określającego swoistość matematyki, warto zwrócić uwagę, iż współcześnie niektórzy znawcy zagadnienia wskazują, że wyłącznym kryterium jest stosowanie metody aksjomatyczno-dedukcyjnej⁷². Dlatego trzeba zapytać: czy – przynajmniej *implicite* – takie rozwiązanie nie jest zawarte w pracach twórcy teorii mnogości?

⁷⁰ Zob. s. 58, 64.

Zakłada się tutaj, że w pojęciu Cantora teoria mnogości należała do zakresu terminu „matematyka” wyznaczonego *ostensywnie*.

⁷¹ „Unter *angewandter Mengenlehre* verstehe ich Dasjenige, was man *Naturlehre* oder *Kosmologie* zu nennen pflegt, wozu also die sämtlichen *Naturwissenschaften* gehören, sowohl die auf die anorganische, wie auch auf die organische Welt sich beziehenden. ...

Die *mathematische Physik* wird von der *Typentheorie* gleichfalls betroffen, weil sich letztere als ein mächtiges und tief einschneidendes Werkzeug zur *Ergründung* und zur *begrifflichen Construction* der sogenannten *Materie* ausweist.

Damit hängt auch die Anwendbarkeit der *Typentheorie* in der *Chemie* zusammen ...

Von ganz besonderem Interesse scheinen mir aber die Anwendungen der mathematischen *Typentheorie* auf das Studium und die Forschung im Gebiete des *Organischen* zu sein”. Cantor, *Prinzipien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, s. 85 [zob. też przypis 52].

⁷² Por. Perzanowski, *Podstawy matematyki i logiki*, s. 150.

3.1. *Apodyktyczny* charakter aksjomatów

Cantor wyraźnie podkreślał, że matematyka jest nauką dedukcyjną⁷³. Natomiast istotne wątpliwości może budzić doszukiwanie się u niego przekonania o potrzebie aksjomatyzacji matematyki. skoro nigdy nie podjął nawet próby zaksjomatyzowania stworzonej przez siebie teorii mnogości. Wątpliwości są tym większe, że – jak pokazano wcześniej – uznawał on teorię mnogości za „podstawową” teorię matematyki.

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że Cantor, który początkowo rozwijał teorię mnogości w sposób mało systematyczny, podjął w latach 1895-1897 próbę pewnego jej usystematyzowania⁷⁴. Oczywiście nie podał systemu zaksjomatyzowanego, a jedynie uporządkowany zespół twierdzeń i definicji, oparty na wprowadzonych na samym początku pracy ontologicznych intuicjach dotyczących natury zbioru. Zaś E. Zermelo, aksjomatyzując teorię mnogości, starał się zachować jak najwięcej z tej jej przedaksjomatycznej wersji i jednocześnie uniknąć antynomii⁷⁵. W tym znaczeniu praca Cantora z lat 1895-1897 była istotnym krokiem w kierunku stworzenia aksjomatycznego systemu teorii mnogości.

Pytanie o to, na ile matematyka według Cantora jest lub winna być systemem aksjomatyczno-dedukcyjnym, można stawiać zasadnie tym bardziej, że nie tylko formułował on pewne aksjomaty *explicite*, ale w jego pracach można się również doszukać elementów refleksji nad naturą aksjomatów i ich funkcją w matematyce.

Generalnie należy stwierdzić, że według Cantora w matematyce – choć nie we wszystkich dyscyplinach – dopuszczalne są dwa rodzaje aksjomatów:

I. Aksjomaty „w starym znaczeniu tego słowa”, które są „prostymi, niedowodliwymi prawdami”⁷⁶.

Uwzględniając podkreślany mocno przez Cantora izomorfizm transsubiektywnej i intrasubiektywnej sfery rzeczywistości należy sądzić, że chodziło mu w tym stwierdzeniu o prawdę semantyczną, rozumianą klasycznie. Przy założeniu, że tylko takie aksjomaty mogą należeć do zdań matematyki, zarówno one, jak i w konsekwencji wszystkie inne zdania matematyki są niepodważalne i bezwarunkowo prawdziwe (semantycznie). Takie stanowisko określa się mianem „*apodyktyczności*”⁷⁷.

⁷³ Por. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, w: GA, s. 207.

⁷⁴ Por. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*.

⁷⁵ “It has not, however, been successfully replaced by one that is just as simple and does not give rise to such reservations. Under these circumstances there is at this point nothing left for us to do but to proceed in the opposite direction and, starting from set theory as it is historically given, to seek out the principles required for establishing the foundations of this mathematical discipline. In solving the problem we must, on the one hand, restrict these principles sufficiently to exclude all contradictions and, on the other, take them sufficiently wide to retain all that is valuable in this theory”. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, „*Mathematische Annalen*” 41 (1908) Bd. 65, s. 261 (261-268), tłum. angielskie za H. Wang, *From mathematics to philosophy*, London 1974, s. 190.

⁷⁶ “Mit anderen Worten: Die Tatsache der „Konsistenz“ endlicher Vielheiten ist eine einfache, unbeweisbare Wahrheit, es ist „*Das Axiom der Arithmetik*” (im alten Sinne des Wortes). Und ebenso ist die „Konsistenz“ der Vielheiten, denen ich die Alefs als Kardinalzahlen zuspreche „*das Axiom der erweiterten transfiniten Arithmetik*””. Cantor, *List do R. Dedekinda* z 28.08.1899, w: GA, s. 447-448.

⁷⁷ Por. Perzanowski, dz. cyt., s. 144.

2. Aksjomaty, które mają charakter hipotez. Ich przykładem są aksjomaty różnych geometrii⁷⁸. Przez odniesienie do Cantorowskiej charakterystyki aksjomatów pierwszego typu można by je określić jako „aksjomaty w nowym znaczeniu tego słowa”. Stanowisko, które przyjmuje, iż w matematyce występują jedynie aksjomaty-hipotezy, i że w konsekwencji twierdzenia matematyczne są tylko warunkowo prawdziwe, określa się mianem „*hipotetyzmu*”⁷⁹.

Dopuszczenie przez Cantora obydwu typów aksjomatów wydaje się na pierwszy rzut oka paradoksalne, a przynajmniej niekonsekwentne. Należy jednak przypomnieć, że w trakcie wcześniejszych analiz dotyczących jego filozofii matematyki dostrzeżone zostały dwie tezy, z których jedna wydaje się ściśle związana ze skrajną formą *apodyktyzmu*, zaś druga ze skrajną formą *hipotetyzmu*.

Pierwsza wyrażała sąd o tym, że skoro istnieje izomorfizm rzeczywistości transsubiektywnej i intrasubiektywnej, to twierdzenia matematyki opisują jakiś wycinek rzeczywistości transsubiektywnej. Zatem twierdzenia matematyki są prawdziwe (semantycznie). Druga teza głosiła konwencjonalny charakter matematyki w tym znaczeniu, że wyrażała przyzwolenie na wprowadzenie do matematyki dowolnego nowego pojęcia, definiowanego za pomocą pojęć już wcześniej wprowadzonych do matematyki, byle tylko nowe pojęcie było niesprzeczne.

Pierwsza z tez jest wyrazem *apodyktyzmu*, druga, gdyby rozumieć ją szerzej i jednocześnie potraktować aksjomatykę (niesprzeczną) jako uwikłaną definicję pojęć pierwotnych, byłaby w istocie twierdzeniem *hipotetyzmu*. Jak zatem według koncepcji matematyki Cantora możliwe było dopuszczenie dwu typów aksjomatów? Jak godził on *apodyktyzm* z *hipotetyzmem*?

Rozwiązanie tego problemu należy rozpocząć od ponownego wskazania, że według Cantora nie każdy typ aksjomatu mógł występować w każdej teorii należącej do matematyki. Przede wszystkim nie dopuszczał on możliwości wprowadzenia aksjomatów-hipotez do arytmetyki, a w zasadzie do teorii mnogości. Odrzucił bowiem propozycję G. Veronese, aby teorię typów porządkowych – a w konsekwencji arytmetykę liczb naturalnych – oprzeć na tak rozumianych aksjomatach⁸⁰.

W istocie oznaczało to odrzucenie możliwości istnienia dwu nierównoważnych aksjomatyk teorii mnogości⁸¹. Powód stanowiło przekonanie, że twierdzenia tej teorii wyrażają niepodważalne „prawdy podstawowe”⁸². Innymi słowy: jeśli

⁷⁸ „Von *Hypothesen* ist in meinen arithmetischen Untersuchungen über das Endliche und Transfinite überall gar keine Rede, sondern nur von der Ergründung des Realen in der Natur Vorhandenen.

Sie hingegen glauben nach der Art der Metageometer Riemann, Helmholtz und Genossen, *Hypothesen auch in der Arithmetik* aufstellen zu können, was ganz unmöglich ist; darin liegt Ihre ebenso verhängnisvolle wie unglückliche Täuschung, von welcher ich Sie nicht abbringen kann und mag”. G. Cantor, *List do G. Veronese* z 17.11.1890, w: W. Purkert, H. J. Ilgads, *Georg Cantor 1845-1918*, s. 202 (202-203).

Cantor zaliczał geometrię do *czystej matematyki* [zob. przypis 25].

⁷⁹ Por. Perzanowski, dz. cyt., s. 144.

⁸⁰ Zob. przypis 78.

⁸¹ Zob. przypis 78.

⁸² „So wenig sich in der Arithmetik der endlichen Anzahlen andere Grundgesetze aufstellen lassen, als die seit Alters her an den Zahlen 1, 2, 3 ... erkannten, ebenso wenig ist eine Abweichung von den arithmetischen Grundwahrheiten im Gebiete des Transfiniten möglich.

«Ilypothesen», welche gegen diese Grundwahrheiten verstoßen, sind ebenso falsch und widersprechend, wie etwa der Satz $2 + 2 = 5$ oder ein viereckiger Kreis. Es genügt für mich, derartige Hypothesen an der Spitze irgend einer Untersuchung gestellt zu sehen, um von vorn herein zu wissen, daß diese Untersuchung falsch sein muss”. Cantor, dz. cyt., s. 202.

zdecydować się na aksjomatyzowanie intuicji dotyczących zbioru, to dopuszczalna byłaby tylko jedna aksjomatyka lub ewentualnie aksjomatyki jej równoważne.

Skoro zaś według Cantora *czysta matematyka jest czystą teorią mnogości*, co sugeruje, że wszystkie dyscypliny matematyki (definiowanej *ostensywnie*) można wyprowadzić z teorii mnogości, zatem deklarowana przez niego „wolność” matematyki była względna. Istotne jej ograniczenie stanowiły bowiem intuicje dotyczące własności zbioru oraz – jak można sądzić – jedyna aksjomatyka teorii mnogości, gdyby zdecydował się on na aksjomatyzację stworzonej przez siebie teorii.

Przedstawiona argumentacja pozwala jednocześnie potwierdzić formułowany wcześniej wniosek, że Cantor stał na stanowisku *apodyktyzmu*. Tym bardziej problematyczne wydaje się dopuszczenie przez niego aksjomatów-hipotez w przynajmniej jednej dyscyplinie matematycznej, mianowicie w geometrii⁸³.

Przystępując do ukazania możliwości rozwiązania powyższego problemu należy przypomnieć, że Cantor był przeciwnikiem Kantowskiego przekonania, głoszącego iż podmiot poznający posiada jakieś aprioryczne wyobrażenie przestrzeni, na którym budowana jest geometria. Dopuszczał on też istnienie przestrzeni o różnych własnościach topologicznych (przestrzenie ciągle i nieciągłe), nie rozstrzygając, która z nich dobrze opisuje własności „rzeczywistej” przestrzeni fizycznej i jako taka może stanowić podstawę mechaniki⁸⁴.

Powyższe przesłanki są dodatkowymi argumentami za tym, że Cantor akceptował wielość geometrii na gruncie matematyki.

Jednocześnie był on przedstawicielem szkoły weierstrassowskiej, która istotnie przyczyniła się do arytmetyzacji matematyki. Trzeba też przypomnieć, że około roku 1870 udało się zarytmetyzować geometrie nie-Euklidesowe, przez wskazanie ich modeli w geometrii Euklidesowej⁸⁵. I właśnie w tym fakcie należy się dopatrywać zaakceptowania przez Cantora w matematyce różnych geometrii, o aksjomatach których twierdzono, że są po prostu hipotezami.

We wspomnianym liście do G. Veronese zawarte jest stwierdzenie, które można interpretować w ten sposób, że dla Cantora warunkiem koniecznym i wystarczającym zaakceptowania jakiejś geometrii była możliwość jej arytmetyzacji – zapewne pośrednio, przez wskazanie modelu w zarytmetyzowanej już wcześniej innej geometrii⁸⁶. Innymi słowy: Cantor nie negował prób budowy różnych geometrii, opartych na różnych zbiorach aksjomatów, ale geometria taka była włączona do matematyki dopiero w momencie jej arytmetyzacji. Arytmetyzacja jakiejś geometrii byłaby w takim ujęciu równoznaczna z „uzasadnieniem” jej aksjomatów-hipotez i konstatacją *apodyktycznego* charakteru jej twierdzeń. Generalnie więc wszystkie twierdzenia matematyki byłyby w tym ujęciu niepodważalne i bezwzględnie prawdziwe (semantycznie), a *hipotetyzm* niektórych teorii matematyki tylko pozorny.

Oczywiście takie rozwiązanie, według którego wszystkie twierdzenia różnych geometrii są bezwzględnie prawdziwe (semantycznie), stwarza nową sytuację problemową, szczególnie trudną, ale i typową dla wszystkich filozofów matematyki

⁸³ Zob. przypis 78.

⁸⁴ Zob. przypis 34.

⁸⁵ Zob. przypis 17.

⁸⁶ „Geometrische Theorien, welcher Art sie auch seien, stehen unter den Gesetzen der Arithmetik, sowohl der finiten wie der transfiniten. Hypothesen, welche diesen Gesetzen widersprechen, sind unter keinen Umständen zulässig”. Cantor, dz. cyt., s. 202.

wychodzących z założeń platońskich. Tego zagadnienia Cantor, nie poświęcający geometrii i filozofii geometrii żadnej praktycznej uwagi, nie podjął.

Wypada zauważyć, iż Cantor nigdzie nie postawił wymogu aksjomatyzacji każdej teorii matematycznej. Nie traktował on – przynajmniej w swej praktyce matematycznej – aksjomatów jako „danych wyjściowych” teorii. Jeśli *explicite* pojawiały się w jego pracach tezy, które można by określić mianem „tez niedowodliwych”, to raczej pełniły one funkcję lematów – pomocniczych tez, niezbędnych dla dowodu danego twierdzenia. Z tych względów nie można twierdzić, iż stosowanie metody aksjomatyczno-dedukcyjnej pełniło według koncepcji Cantora funkcję kryterium matematyczności teorii.

3.2. Apodyktyzm aksjomatów i twierdzeń jako kryterium matematyczności?

Badania prowadzone w niniejszej pracy wykazały, że matematyka była według Cantora nauką aprioryczną i dedukcyjną. Uwzględniając przeprowadzone wyżej analizy należy uzupełnić, że była nauką *apodyktyczną*.

Natomiast nauki zaliczane do *matematyki stosowanej* – później do *stosowanej teorii mnogości*, nauk metafizycznych – wychodziły od hipotez dotyczących rzeczywistości transsubiektywnej⁸⁷. Nie można na podstawie tekstów Cantora rozstrzygnąć: czy hipotezy te posiadały w jego ujęciu charakter sądów apriorycznych, czy też były uzasadniane a posteriori?⁸⁸

Po utożsamieniu pojęć występujących w pierwszych twierdzeniach-hipotezach tych nauk z pojęciami teorii mnogości (matematyki) – do twierdzeń pochodnych dochodziło się metodą dedukcyjną, tworząc w ten sposób matematyczny model pewnego „fragmentu” rzeczywistości transsubiektywnej⁸⁹. Za dedukcyjnym charakterem wspomnianych nauk przemawia i to, że według Cantora stosowany w nich język (formalizm) teorii mnogości (matematyki) był w jego przekonaniu poszukiwaną już przez G.W. Leibniza formą *mathesis universalis*⁹⁰. Nie jest więc wykluczone, że Cantor zgodziłby się, iż metoda nauk zaliczanych przez niego do *matematyki stosowanej* (nauk metafizycznych) to metoda dedukcyjna.

Zatem ani o aprioryzmie, ani o metodzie dedukcyjnej nie można orzec z całą pewnością, że pełniły – w prezentowanej koncepcji Cantora – funkcję kryterium matematyczności.

Natomiast z pewnością, ze względu na charakter pierwszych, niedowodliwych twierdzeń, teorie zaliczane do *matematyki stosowanej* były dla twórcy teorii mnogości teoriami *hipotetycznymi*, zaś *matematyka czysta* nauką *apodyktyczną*.

Stwierdzenie, iż matematyka jest nauką *apodyktyczną*, oparte zostało na przekonaniu, że wszystkie teorie matematyczne są sprowadzalne do teorii mnogości⁹¹, a podstawowe twierdzenia tej ostatniej są bezwarunkowo prawdziwe

⁸⁷ Zob. przypis 65.

⁸⁸ Zob. s. 68.

Hipotezy uzasadniane były na gruncie metafizyki, w drugim ujawnionym w tej pracy znaczeniu – choć nie wiadomo w jaki sposób. Czy chodziło o jakąś formę „doświadczalnego” odwołania do rzeczywistości transsubiektywnej? Czy generalna preferencja platońska nie jest w tym wypadku przesłanką wskazującą jednak na jakąś formę aprioryzmu?

⁸⁹ Oczywiście problemem pozostaje wówczas weryfikacja, która winna wprowadzić w takiej czy innej formie indukcję [zob. przypis 65].

⁹⁰ Zob. przypis 65.

⁹¹ Zob. s. 74-74.

(w znaczeniu semantycznym). Innymi słowy: *apodyktyzm* twierdzeń matematyki – w koncepcji Cantora – stanowi tylko pochodną metamatematycznego kryterium matematyczności, opartego na kategorii sprowadzalności teorii. *Apodyktyzm* nie może pełnić funkcji autonomicznego kryterium.

II. ZWIĄZKI MATEMATYKI Z INNYMI NAUKAMI

Innym sposobem charakterystyki swoistości matematyki jest określenie jej stosunku do innych nauk lub szerzej – jej miejsca w kulturze.

1. Matematyka a nauki przyrodnicze

W zasadzie relacja: matematyka a nauki przyrodnicze w ujęciu Cantora (w jego terminologii: *matematyka czysta* a *matematyka stosowana*) została już naświetlona w rozważaniach dotyczących kryteriów demarkacji między tymi naukami. Istotna różnica między naukami przyrodniczymi a matematyką polegała jego zdaniem na niesprowadzalności podstawowych pojęć nauk przyrodniczych oraz też, w których zostały one zawarte, do pojęć i twierdzeń matematyki. Podstawowe twierdzenia nauk przyrodniczych zostały przez niego sklasyfikowane jako hipotezy.

Tym niemniej język nauk przyrodniczych mógł i powinien być zmatematyzowany. Takie przekonanie miało swe uzasadnienie między innymi w platońskich inspiracjach filozofii Cantora, które zostały wyrażone w tezie o izomorfizmie dwu sfer rzeczywistości: transsubiektywnej i intrasubiektywnej. Aby jednak twierdzenia nauk przyrodniczych mogły zostać zmatematyzowane i jednocześnie dobrze tłumaczyły procesy zachodzące w sferze transsubiektywnej, należało najpierw:

1. Ustalić na płaszczyźnie refleksji metafizycznej, że podstawowe pojęcia nauk przyrodniczych mają swoje korelaty w sferze transsubiektywnej⁹².

2. Przyjąć, zapewne również na podstawie refleksji natury metafizycznej, iż zachodzi izomorfizm między badanym w naukach przyrodniczych „wycinkiem” rzeczywistości transsubiektywnej a wybraną dziedziną matematyczną. W ten sposób obiektom fizycznym przyporządkowano by elementy, względnie podzbiory wybranej dziedziny matematycznej. Innymi słowy: należało dokonać wyboru modelu matematycznego „wycinka” rzeczywistości transsubiektywnej⁹³.

Istniał zbiór różnych modeli matematycznych dla opisu danego aspektu sfery transsubiektywnej⁹⁴. Cantor był przekonany o możliwości tworzenia różnych modeli tej samej rzeczywistości. Sądził też, że dzięki zastosowaniu języka matematyki – a dokładniej teorii mnogości – uda się stworzyć rodzaj *mathesis universalis*.

Apodyktycznego charakteru twierdzeń geometrii – w koncepcji Cantora – można bronić wyłącznie na podstawie dokonanej w dziewiętnastym wieku arytmetyzacji geometrii (a więc sprowadzalności do arytmetyki liczb naturalnych – w konsekwencji zaś do teorii mnogości).

⁹² W przypadku Cantorowskiej hipotezy świata chodziło o pojęcia: monady eterycznej, monady materialnej oraz przestrzeni fizycznej [zob. przypisy 34, 65].

⁹³ Cantor utożsamiał przestrzeń fizyczną z trójwymiarową przestrzenią Euklidesową, zaś monady z punktami tej przestrzeni [zob. przypisy 34, 65].

⁹⁴ W opisie rzeczywistości transsubiektywnej można się było posłużyć – zdaniem Cantora – przestrzeniami o różnych własnościach topologicznych [zob. przypis 34].

dobrze tłumaczącej wszystkie problemy w zakresie fizyki, chemii oraz nauk organicznych⁹⁵.

2. Matematyka a filozofia

Zgodnie z przyjętymi założeniami, dalszym etapem prezentacji charakterystyki matematyki zawartej w pismach Cantora będzie ukazanie, jakie relacje wiązały według niego matematykę z filozofią oraz z teologią⁹⁶. Należy zaznaczyć, że nie będzie chodziło o „rzeczywiste” relacje między założeniami ontologicznymi, heurystycznymi lub poznawczymi a matematyką uprawianą przez Cantora lecz przede wszystkim o związki przez niego dostrzegane i deklarowane. Znajomość relacji pierwszego typu może pełnić jedynie funkcję pomocniczą, uzupełniającą, gdy trudno będzie jednoznacznie ustalić jego stanowisko w jakiejś kwestii.

Cantor zawęził w zasadzie opisy relacji między filozofią a matematyką do relacji między metafizyką, rozumianą jako ontologia, a matematyką. Metafizyka była *logicznie pierwotna* w stosunku do matematyki. Tym niemniej w relacji między nimi twórca teorii mnogości dostrzegał dwie składowe, które czyniły z tej zależności rodzaj sprzężenia zwrotnego („Tauschverkehr⁹⁷”). Idąc za tym spostrzeżeniem, wypada podzielić relacji ontologia-matematyka na dwie części, które wyjaśnią, jak postrzegał Cantor zależność matematyki od ontologii i ontologii od matematyki.

2.1. Zależność matematyki od ontologii

Charakterystykę zależności matematyki od ontologii wyraził Cantor w stwierdzeniu, że „ogólna teoria mnogości ... należy do metafizyki”⁹⁸. Istniały dwie – jak się wydaje – przesłanki, na których oparł on wspomnianą tezę:

⁹⁵ Zob. przypisy 34, 65.

⁹⁶ W pracach Cantora nie ma żadnej wyraźnej wskazówki, jak rozumiał on termin „nauka” („Wissenschaft”). Z drugiej strony twierdził, że metafizyka jest nauką [zob. przypis 97], a w teologii może dokonywać się „naukowy postęp” [zob. przypis 108]. Należy zatem sądzić, że Cantor był skłonny klasyfikować zarówno metafizykę, jak i jakąś formę teologii (najprawdopodobniej spekulatywną teologię neotomistyczną, był bowiem w kontakcie z tymi myślicielami katolickimi, którzy na bazie neotomizmu chcieli odnowić teologię) jako nauki („Wissenschaft”).

⁹⁷ „Denn ich gehöre nicht zu Denjenigen, welche wegen der mancherlei Misserfolge, welche die *Metaphysik* durch die Versehen einiger ihrer Bearbeiter, besonders in diesem und im vorigen Jahrhundert, geerntet hat, diese Wissenschaft selbst gering schätzen; ich glaube dass *Metaphysik* und *Mathematik* von Rechtswegen in einem Tauschverkehr stehen sollten und dass in den Zeiten ihrer entscheidendsten Fortschritte sie eng verbrüdet auftreten”. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, s. 83.

⁹⁸ „Die allgemeine Mengenlehre, welche Ihnen sowohl in der Schrift „Zur Lehre des Transfiniten” wie auch in dem ersten Artikel der begonnenen Arbeit „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre” in ihren Principien entgegentritt, gehört durchaus zur *Metaphysik*. Sie überzeugen sich hiervon leicht, wenn Sie die Kategorien der Kardinalzahlen und des Ordnungstypus, diese Grundbegriffe der Mengenlehre, auf den Grad ihrer Allgemeinheit prüfen und außerdem bemerken, daß bei Ihnen das Denken völlig rein ist, daß der Phantasie nicht der geringste Spielraum eingeräumt ist. Hieran wird durch die Bilder nichts geändert, deren ich mich gelegentlich, wie es alle *Metaphysiker* thun, zur Klarlegung metaphysischer Begriffe bediene, und auch der Umstand, daß die unter meiner Feder noch entstehende Arbeit in mathematischen Journalen herausgegeben wird, modificiert nicht den metaphysischen Charakter und Inhalt derselben”. Cantor, *List do P. Th. Essera z 1-15.02.1896*, w: Meschkowski, *Aus den Briefbüchern Georg Cantors*, s. 515.

1. Teoria mnogości posługiwała się, podobnie jak ontologia, kategoriami bardzo ogólnymi. Cantor wymienił pojęcia liczby kardynalnej i typu porządkowego. Ponieważ teoria mnogości posługiwała się tak ogólnymi pojęciami, dlatego posiadała – jego zdaniem – „metafizyczny charakter i zawartość” („den metaphysischen Charakter und Inhalt”)⁹⁹. Należałoby dodać, że ich ogólność była pochodną ogólności podstawowego pojęcia teoriomnogościowego, to znaczy zbioru¹⁰⁰.

2. Podstawowe intuicje, charakteryzujące pojęcie zbioru, zostały przez Cantora wyrażone w kategoriach ontologicznych. Zbiór był w jego pojęciu czymś „pokrewnym” idei Platona¹⁰¹.

Przekonanie Cantora, iż teoria mnogości należy do metafizyki, w zestawieniu z przesłankami, które stanowiły podstawę owego przekonania, pozwala wnioskować, że postrzegał on teorię mnogości jako część metafizyki w znaczeniu ontologii, czyli ogólnej teorii bytu. Wyjaśnienie tego, jak pojmował on relację metafizyki do matematyki, wymaga jeszcze określenia znaczenia, jakie w cytowanym tekście¹⁰² związał Cantor z terminem „teoria mnogości”. W niniejszej analizie trzeba uwzględnić dwa znaczenia:

a. (węższe) – teoria mnogości jest tą teorią, którą Cantor „odkrył”,

b. (szersze) – na mocy metamatematycznego kryterium matematyczności termin „teoria mnogości” jest równoznaczny z terminem „matematyka”. Cała bowiem matematyka może zostać wyrażona w kategoriach teoriomnogościowych.

Przy uwzględnieniu drugiej możliwości, matematyka stanowiłaby poddyscyplinę ontologii. Wydaje się jednak, że Cantor miał na myśli pierwsze, węższe znaczenie terminu „teoria mnogości”. Przede wszystkim dlatego, że w cytowanym tekście zdaje się ją zawężać do teorii, w której wypracowuje się pojęcia liczby kardynalnej oraz typu porządkowego, i w ramach której rozpatruje się ich własności¹⁰³.

Zatem relację ontologia-matematyka w ujęciu Cantora można by scharakteryzować następująco: „podstawowa” teoria matematyczna, teoria mnogości, jest częścią ontologii. Wszystkie teorie matematyczne są sprowadzalne do ontologii. Ostatnią tezę można interpretować i w ten sposób, że teoria mnogości dostarcza wszystkim teoriom matematycznym stosownych założeń ontologicznych.

2.2. Stosowalność metod matematycznych w ontologii

Zgodnie z przyjętymi założeniami należy teraz przystąpić do analizy zależności ontologii od matematyki. Na podstawie tekstów Cantora można ukazać dwa typy owej zależności:

⁹⁹ Zob. przypis 98.

¹⁰⁰ „*Mannigfaltigkeitslehre*. Mit diesem Worte bezeichne ich einen sehr viel umfassenden Lehrbegriff, den ich bisher nur in der speziellen Gestaltung einer arithmetischen oder geometrischen Mengenlehre auszubilden versucht habe. Unter einer „Mannigfaltigkeit“ oder „Menge“ verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich Eines denken läßt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem *Platonischen* (podkr. Cantora) eidos oder idea ...”. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nr 5. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. w: GA, s. 204 (przypis do s. 165).

¹⁰¹ Zob. przypis 100.

¹⁰² Zob. przypis 98.

¹⁰³ Zob. przypis 98.

1. Matematyka jest nauką pomocniczą ontologii¹⁰⁴.

Zapewne chodziło Cantorowi o zaakcentowanie możliwości rozwiązywania problemów ontologicznych za pomocą aparatury pojęciowej matematyki. Najlepszy przykład stanowi podanie przez Cantora definicji *continuum* liniowego w kategoriach topologicznych. Było to – według niego – typowe zagadnienie filozoficzne (ontologiczne), które udało się rozwiązać dopiero po zastosowaniu pojęciowej aparatury matematyki.

2. Cantor wpadł na pomysł klasyfikowania różnych bytów za pomocą kategorii teoriomnogościowych – typów porządkowych¹⁰⁵. Ta ledwie naszkicowana idea nasuwa przypuszczenie, że być może dopuszczał on możliwość zmatematyzowania czy sformalizowania ontologii za pomocą kategorii teoriomnogościowych, takich jak zbiór, moc lub typ porządkowy. Owo przypuszczenie znajduje potwierdzenie w traktowaniu zbioru jako kategorii „pokrewnej” idei Platona i stwierdzeniu, że teoria mnogości jest poddyscypliną ontologii.

Szczególnie ostatnia teza godna jest uwagi, bowiem implikuje, że według Cantora przynajmniej część ontologii, w wyniku powstania teorii mnogości, już jest zmatematyzowana. Być może również udana próba zdefiniowania *continuum* liniowego wzmacniała jego nadzieję na to, że możliwe będzie sformalizowanie tych „obszarów” ontologii, w których da się „przełożyć” dotychczasowe, klasyczne pojęcia na język teorii mnogości. Niezależnie od tego, czy to ostatnie przypuszczenie jest słuszne, Cantor na pewno postrzegał teorię mnogości jako rodzaj ontologii formalnej.

Podsumowując analizy dotyczące deklarowanych przez Cantora związków między filozofią a matematyką, można zauważyć, że redukowane są one w istocie do mającej charakter „sprzężenia zwrotnego” relacji ontologia-teoria mnogości.

¹⁰⁴ „Die Begründung der Prinzipien der Math. und der Naturwiss. fällt der Metaphysik zu; sie hat daher jene als ihre Kinder sowohl wie auch als Diener und Gehülfen anzusehen ...”. Cantor, *List do P. Th. Essera* = 1-15.02.1996, s. 512.

Trzeba zaznaczyć, że Cantor był niekonsekwentny w stosowaniu terminu „metafizyka”. Można twierdzić – pozostając wiernym koncepcji Cantorowskiej – iż zarówno „principia matematyki”, jak i „principia nauk przyrodniczych” są uzależnione od metafizyki tylko wówczas, gdy zaakceptuje się wieloznaczność wspomnianego terminu. Jeśli natomiast rozumieć metafizykę wyłącznie jako metanaukę lub „filozoficzną krytykę nauk”, to matematyka od takiej metafizyki, zgodnie z deklaracjami Cantora, powinna być niezależna. Wydaje się, że w przytoczonym tekście najprawdopodobniej pomieszał on obydwa znaczenia terminu „metafizyka”.

¹⁰⁵ Wśród kilku charakterystyk typu porządkowego Cantor przedstawił również następującą: „Die Elemente der uns gegenüberstehenden Menge *M* sind getrennt vorzustellen; in dem intellektuellen Abbilde *M* derselben, welches ich ihren Ordnungstypus nenne, sind dagegen die Einsen zu einem Organismus vereinigt. In gewissem Sinne läßt sich jeder Ordnungstypus als ein Kompositum aus *Materie* und *Form* ansehen; die darin enthaltenen, begrifflich unterschiedenen Einsen liefern die *Materie*, während die unter diesen bestehenden Ordnung das der *Form* entsprechende ist”. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, s. 380.

Cantor powoływał się niejednokrotnie na prosty przykład, aby przedstawić intuicje dotyczące możliwych zastosowań pojęcia typu porządkowego. Jedną z ilustracji odwoływała się do porównania z zakresu malarstwa i muzyki. Każdy obraz można traktować jako zbiór punktów. Elementy owego zbioru są porządkowalne na wiele sposobów. Cantor podawał przykładowo, iż punkty obrazu mogły być porządkowane wertykalnie, horyzontalnie, a także ze względu na ich kolor (długość fali) oraz jego intensywność. Zupełnie podobnie widział on porządkowanie dźwięków utworu symfonicznego. Relacja porządkująca była wprowadzana tutaj ze względu na czas trwania dźwięków, ich kolejność w utworze, wysokość, natężenie. Mogło się okazać, że tak heteronomiczne byty, jak obraz Rembrandta i symfonia Beethovena, posiadały taki sam typ porządkowy (mowa tutaj o typach zbiorów wielokrotnie uporządkowanych). Dawało to, zdaniem Cantora, podstawę dla ściśle matematycznego porównywania bytów lub ich klasyfikacji [Por. Cantor, dz. cyt., s. 421-423].

Ontologia dostarcza teorii mnogości podstawowych pojęć. Na skutek tego pojęcia pochodne posiadają podobny stopień ogólności, jak pojęcia ontologiczne. Dlatego też teoria mnogości stanowi część ontologii. Nie jest wykluczone, że Cantor dysponował pomysłem sformalizowania za pomocą aparatury teorii mnogości „sporego zakresu” ontologii. Taką formalną ontologią była dla niego teoria mnogości.

3. Matematyka a teologia

W ramach wyznaczonego programu badań konieczne jest jeszcze przedstawienie tego, jak Cantor ujmował związek matematyki z teologią. W jego pojęciu związek ten był pośredni i opierał się na relacjach, które łączyły teologię z metafizyką¹⁰⁶. Na podstawie pism Cantora można wyróżnić dwie relacje wiążące teologię z metafizyką:

1. Teologia jest dla metafizyki „przewodnią gwiazdą”, wyznacza metody postępowania i jest źródłem poznania w sytuacjach problemowych, nierozstrzygalnych za pomocą metod naturalnych i zwyczajnych, czyli za pomocą metod samej metafizyki¹⁰⁷.

2. Metafizyka pełni w stosunku do teologii funkcję pomocniczą. Postęp w zakresie metafizyki może oznaczać postęp w teologii, to znaczy może dać głębszy wgląd („Einsicht”) w tajemnice wiary¹⁰⁸.

Ze względu na to, jakie relacje wiązały według Cantora metafizykę z matematyką, można w tym miejscu wyrazić przypuszczenie, że zgodnie z jego koncepcją istniały pewne zależności między matematyką a teologią.

Są przesłanki, które pozwalają stwierdzić, że były to w istocie podobne relacje jak te, które łączyły teologię z metafizyką.

1. Teoria mnogości – w ujęciu Cantora – była zabezpieczona przed antynomiami, bowiem oparta została na zasadach heurystycznych, które odwoływały się do ontologii nieskończoności. W tej zaś istotną funkcję spełniało pojęcie nieskończoności absolutnej, zakorzenione w teologii chrześcijańskiej. Pośrednio więc przesłanki natury teologicznej pozwoliły Cantorowi skonstruować zasady heurystyki, które w jego pojęciu rozwiązywały problem antynomii.

2. Matematyka, podobnie jak metafizyka, czy raczej w łączności z ontologią, może pełnić funkcję nauki pomocniczej teologii. Na takim w istocie założeniu

¹⁰⁶ Można się jedynie domyślać, że chodziło ponownie o ontologię.

¹⁰⁷ „Daß unsere Erörterungen sich der Hauptsache nach auf philosophischen Gebiet bewegen werden, war von vornherein auch meine Meinung. Indem muß ich, um Mißverständnisse und Überraschungen von Anfang an auszuschließen zunächst auf zweierlei aufmerksam machen: erstens auf das unzerreißbare Band, das die Metaphysik mit der Theologie verbindet; indem einerseits Letztere gleichsam der Leitstern ist, nach dem sich erstere in ihren Bahnen richtet und von welchem sie Licht erhält, wenn die natürlichen und ordinären Leuchten versagen; andererseits bedarf die Theologie zu ihrer wissenschaftlichen Entwicklung und der Darstellung der gesamten Philosophie, die also im Dienstverhältnis zu jener steht. Daraus folgt dreierlei: a), daß bei einer metaphysischen Discussion unvermeidbar auch die Theologie gelegentlich mitspricht: b), daß jeder wirkliche Fortschritt in der Metaphysik auch die Hilfsmittel der Theologie selbst verstärkt oder vermehrt, ja unter Umständen sogar dazu führen kann, daß Glaubensgeheimnisse zu tieferen, gehaltvolleren symbolischen Einsichten kommen als es vorher zu erwarten oder zu ahnen war”. Cantor, *List do P. Th. Essera z 1-15.02.1996*, s. 509.

¹⁰⁸ Zob. przypis 107.

oparty był pomysł Cantora, przedstawienia „mieszanego, matematyczno-metafizycznego dowodu”, że świat nie jest odwieczny¹⁰⁹.

Sumując wyniki przeprowadzonych badań, należy stwierdzić, że w istocie jedyne kryterium swoistości matematyki, którym posługiwał się Cantor, stanowiła sprowadzalność teorii do arytmetyki liczb naturalnych, zaś po roku 1884 sprowadzalność do teorii mnogości. Było to kryterium metamatematyczne, opierające się na dokonanej w dziewiętnastym wieku arytmetyzacji matematyki klasycznej.

Można sądzić, iż w przekonaniu Cantora kryterium to obejmowało te i tylko te teorie, które wcześniej zaliczano do matematyki na mocy kryterium *ostensywnego* oraz teorię mnogości. Było ono „otwarte” w tym znaczeniu, że każda nowa teoria, którą można by sprowadzić do teorii mnogości zostałaby zaakceptowana jako matematyczna. Natomiast podejmowane przez Cantora próby oparcia kryterium matematyczności na innych podstawach, filozoficznych lub odwołujących się do metod stosowanych w matematyce, zakładały ostatecznie – jak to pokazano – kryterium metamatematyczne.

Należy też podkreślić, że Cantor – twórca teorii mnogości – jako pierwszy wpadł na pomysł, aby *unifikować* teorie przez sprowadzenie ich do teorii mnogości. Taki pogląd bywa akceptowany również współcześnie, a kiedyś należał do istotnych też programu logicystów¹¹⁰.

W niniejszej pracy wzięto również pod uwagę wypowiedzi Cantora charakteryzujące związki matematyki z filozofią i teologią. Wynika z nich, że postrzegał on teorię mnogości jako ontologię formalną. Interesujące są też jego uwagi dotyczące służebnej roli teorii mnogości wobec filozofii i teologii. Analizowane teksty nie dają jednak żadnego potwierdzenia przypuszczeń, iż Cantor posługiwał się jeszcze jakąś inną niż wspomniana koncepcją swoistości matematyki.

Stwierdzono, że już w punkcie wyjścia prac prowadzących do powstania teorii mnogości Cantor dysponował kryterium metamatematycznym. Oparte ono było na przekonaniu, że wszystkie teorie uznawane „*ostensywnie*” za matematyczne można sprowadzić do teorii wyróżnionej, podstawowej, to znaczy do arytmetyki liczb naturalnych. W roku 1884 Cantor stwierdził, że fundamentalne pojęcie tej arytmetyki, pojęcie liczby naturalnej, da się adekwatnie zdefiniować w wypracowanych wcześniej kategoriach teoriomnogościowych. Sprowadzalność arytmetyki liczb naturalnych do teorii mnogości w połączeniu z akceptowanym wcześniej kryterium metamatematycznym rozwiązywało w pojęciu Cantora dwa problemy. Ostatecznie potwierdzało jego zdaniem – poddawaną w wątpliwość przez L. Kroneckera i jego zwolenników – możliwość włączenia teorii mnogości do matematyki. Po wtóre wyznaczało teorii mnogości „miejsce” w „strukturze” matematyki – „miejsce” teorii podstawowej.

„Odkrywanie” przez Cantora teorii mnogości było procesem wielopoziomym. Polegało nie tylko na „krystalizowaniu się” pojęcia liczb pozaskończonych i stwierdzaniu nowych własności zbiorów nieskończonych. Wspomniany

¹⁰⁹ „Wenn hier gesagt wird, daß ein mathematischer Beweis für den zeitlichen Weltanfang nicht geführt werden könne, so liegt der Nachdruck auf dem Wort „mathematischer“, und so weit stimmt meine Ansicht mit der von St. Thomas überein. Dagegen dürfte gerade auf Grund der wahren Lehre vom Transfiniten ein gemischter, mathematisch-metaphysischer Beweis des Satzes wohl zu erbringen sein und insofern welche ich allerdings von St. Thomas ab, der die Ansicht vertritt (S. th. q. 46, a. 2 concl.): Mundum non semper fuisse, sola fide tenetur, et demonstrative probari non potest”. Cantor, *List do Dr. Kerry* z 8.03.1887, w: Meschkowski, *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, s. 125 – 126.

¹¹⁰ Por. Perzanowski, dz. cyt., s. 150.

proces obejmował również „odkrywanie” własności samej teorii, opisujących – w pojęciu Cantora – jej „miejsce” w „strukturze” matematyki. Stwierdzenie tych istotnych własności byłoby niemożliwe bez akceptowanej koncepcji swoistości matematyki opartej a metamatematycznym kryterium sprowadzalności teorii. W tym właśnie znaczeniu można twierdzić, że koncepcja ta spełniła funkcję heurystyczną w procesie powstania teorii mnogości.

EIGENART DER MATHEMATIK NACH GEORG CANTOR

Zusammenfassung

Nach Zusammenzählung der Ergebnisse der durchgeführten Forschungen muß man feststellen, daß tatsächlich das einzige Kriterium der Eigenart der Mathematik, mit welchem Cantor sich bedient hat, bildete die Hinführlichkeit der Theorie zur Arithmetik der natürlichen Zahlen und nach dem Jahr 1884 die Hinführlichkeit zur Mengenlehre. Das war ein metamathematisches Kriterium, welches sich an der im neunzehnten Jahrhundert durchgeführten Arithmetisation der klassischen Mathematik stützt.

Man kann glauben, daß in der Überzeugung von Cantor dieses Kriterium diese und nur diese Theorien umfaßten, welche vorher zur Mathematik auf Grund des ostensiven Kriterium angerechnet wurden und der Mengenlehre. Es war in dieser Bedeutung „geöffnet”, daß jede neue Theorie, welche man zu der Mengenlehre herabführen könnte, würde als mathematische angenommen sein. Dagegen die von Cantor unternommenen Versuche, das Kriterium der Mathematik auf anderen Grundlagen: philosophischen, oder sich berufenden zu den in der Mathematik angewandten Methoden zu stützen, setzen schließlich voraus - wie es gezeigt wurde - das metamathematische Kriterium.

Man muß auch betonen, daß Cantor – Schöpfer der Mengenlehre – als erster auf den Einfall gekommen ist, die Theorien, durch Herbeiführung zur Mengenlehre, zu unifizieren. Solche Auffassung wird auch gegenwärtig angenommen und einst gehörte sie zu den wesentlichen Thesen des Programmes der Logizisten.

In dieser Schrift wurden auch Aussagen von Cantor berücksichtigt, welche die Zusammenhänge der Mathematik mit der Philosophie und Theologie charakterisieren. Es geht aus ihnen hervor, daß er die Mengenlehre als formale Ontologie wahrgenommen hat. Interessant sind auch seine Bemerkungen, die sich auf die dienstbare Rolle der Mengenlehre, gegenüber der Philosophie und Theologie beziehen. Die analysierten Texte geben aber keine Bestätigung der Vermutungen, daß Cantor sich noch mit irgendeiner anderen, als hier erwähnten Konzeption der Eigenart der Mathematik bedient hat.