Annales Mathematicae Silesianae 11. Katowice 1997, 21 – 27

Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 1665

PERTURBATIONS DE FONCTIONS ADDITIVES

ALICE SIMON ET PETER VOLKMANN

Résumé. Soient $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \neq 1$ et $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, tels que $f(x+y) = f(x) + f(y) + o(\max\{x^\alpha, y^\alpha\})$, si $\max\{x, y\} \downarrow 0$. On montre que $f(x) = a(x) + o(x^\alpha)$, où a est une fonction additive, et on applique ce résultat pour étudier une généralisation de la notion de dérivée seconde pour une fonction réelle.
Abstract. Let $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \neq 1$ and $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ be such that $f(x+y) = f(x) + f(y) + o(\max\{x^\alpha, y^\alpha\})$ as $\max\{x, y\} \downarrow 0$. We show that $f(x) = a(x) + o(x^\alpha)$, where a is an additive function, and we use this result in studying a second order generalized derivative for real functions.

1. Un résultat de stabilité

Une fonction additive est une solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy

$$a(x+y) = a(x) + a(y); \tag{1}$$

sur ce sujet voir, p.ex., les livres de Aczél [1], Aczél et Dhombres [2], Kuczma [5]. Un théorème de Hyers [4] sur la stabilité de (1) peut être énoncé ainsi: Si $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ satisfait à $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant b$ $(x, y \geqslant 0)$, où b est une constante, alors il existe une fonction additive $a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ (uniquement déterminée), telle que $|f(x) - a(x)| \leqslant b$ $(x \geqslant 0)$; de plus

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x) \qquad (x \geqslant 0). \tag{2}$$

On en déduit le résultat suivant sur la stabilité de l'équation fonctionnelle de Jensen $f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$:

THÉORÈME 1. *Soient $I = [\lambda, \mu] \subseteq \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ satisfaisant à*

$$\left| f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) - \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \right| \leqslant b \qquad (x, y \in I), \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* AMS classification: Primary 26A24, 39B22.

où $b \in \mathbb{R}$. Alors il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive et une constante c, telles que

$$|f(x) - a(x) - c| \leqslant 6b \qquad (x \in I). \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. Par un changement de variable évident on se ramène au cas $I = [0,1]$, et ensuite on suppose que

$$f(0) = f(1) = 0 \tag{5}$$

(on remplace f par la fonction $f(x) - f(0) - (f(1) - f(0))x$). Soit $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$. Dans (3) on pose $x = 2t,\ y = 1$, puis $x = 2t,\ y = 0$, et on obtient

$$\left|f\left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f(2t)\right| \leqslant b, \qquad \left|f(t) - \frac{1}{2}f(2t)\right| \leqslant b,$$

d'où

$$\left|f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t)\right| \leqslant 2b \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

Prolongeons f sur $[0, \infty[$ en une fonction périodique de période 1. On a donc $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ et

$$f(x+1) = f(x) \qquad (x \geqslant 0). \tag{7}$$

Etudions f sur $[0,2]$: on vérifie que

$$\left|f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) - \frac{1}{2}(f(x) + f(y))\right| \leqslant 3b \qquad (x, y \in [0,2]). \tag{8}$$

En effet, si $x, y \in [0,1]$ ou $x, y \in [1,2]$, alors cette inégalité découle de (3), (7), et on obtient b au lieu de $3b$ au second membre. Dans les autres cas (c.-à-d. l'un des x, y dans $[0,1]$ et l'autre dans $[1,2]$) on distingue les deux possibilités $\frac{1}{2}(x+y) \in [0,1]$ ou $\frac{1}{2}(x+y) \in [1,2]$, et on utilise (6). Si, dans ce qui précède,

$$f\left(t + \frac{1}{2}\right) = f(t) \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right), \tag{9}$$

alors on obtient l'amélioration suivante de (8):

$$\left|f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) - \frac{1}{2}(f(x) + f(y))\right| \leqslant b \qquad (x, y \in [0,2]). \tag{10}$$

D'une manière analogue on peut étudier f sur $[0,4]$ en utilisant ses propriétés sur $[0,2]$. Remarquons que (7) entraîne en particulier

$$f(t+1)=f(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{11}$$

De (3), (5), (9) on a déduit (10). Par le même raisonnement, les formules (8), (5), (11) donnent

$$\left|f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)-\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\right|\leqslant 3b \qquad (x,y\in[0,4]).$$

Par récurrence on vérifie cette inégalité sur chaque intervalle $[0,2^n]$, d'où

$$\left|f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)-\frac{1}{2}(f(x)+f(y))\right|\leqslant 3b \qquad (x,y\geqslant 0). \tag{12}$$

$y=0$ entraîne

$$\left|f\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}f(x)\right|\leqslant 3b \qquad (x\geqslant 0). \tag{13}$$

En remplaçant x par $x+y$ dans (13) et en utilisant (12), il vient $|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leqslant 12b$ $(x,y\geqslant 0)$. D'après le théorème de Hyers cité plus haut, (2) définit une fonction $a:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ additive, telle que $|f(x)-a(x)|\leqslant 12b$. En fait il résulte de (2), (13) facilement que $|f(x)-a(x)|\leqslant 6b$ $(x\geqslant 0)$. Le prolongement de a dans $\mathbb{R}$ défini par $a(x)=-a(-x)$ $(x<0)$ donne une fonction additive $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, telle que (4) ait lieu (avec $c=0$, à cause des hypothèses supplémentaires $I=[0,1]$ et (5)).

2. Perturbations de fonctions additives

Soient $a:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ additive, $\alpha\geqslant 0$ et $h:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ satisfaisant à

$$h(0)=0, \quad h(x)=o(x^\alpha) \qquad (x\downarrow 0). \tag{14}$$

Alors il est clair que la fonction

$$f(x)=a(x)+h(x) \qquad (x\geqslant 0) \tag{15}$$

vérifie

$$f(x+y)-f(x)-f(y)=o\left(\max\{x^\alpha,y^\alpha\}\right) \qquad (\max\{x,y\}\downarrow 0). \tag{16}$$

On démontre la réciproque suivante:

THÉORÈME 2. *Soient* $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \neq 1$ *et* $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction satisfaisant à* (16). *Alors* f *admet une représentation de la forme* (15), *où* $a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *est additive et* h *vérifie* (14).

DÉMONSTRATION. 1. La condition (16) est équivalente à l'existence d'un $\delta_0 > 0$ et d'un module de continuité $\omega : [0, \delta_0] \to [0, \infty[$ (c.-à-d. $\omega(0) = 0$ et $\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \omega(\delta) = 0$), tels que

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant \delta^\alpha \omega(\delta) \qquad (x, y \in [0, \delta],\ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0). \tag{17}$$

On peut supposer que ω est une fonction croissante.

2. Le cas $0 \leqslant \alpha < 1$. D'après (17), $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant \delta_0^\alpha \omega(\delta_0)$ pour $x, y \in [0, \delta_0]$. On en déduit facilement que l'expression $\left|f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) - \frac{1}{2}(f(x) + f(y))\right|$ reste bornée sur l'intervalle $[0, \delta_0/2]$. D'après le théorème 1, il existe une fonction additive $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que

$$h(x) = f(x) - a(x) \qquad (x \geqslant 0) \tag{18}$$

soit bornée sur $[0, \delta_0/2]$, et il suffit de montrer que

$$h(x) = o(x^\alpha) \qquad (x \downarrow 0). \tag{19}$$

On écrit

$$h(x) = x^\alpha \varphi(x) \qquad (x > 0), \tag{20}$$

et on introduit $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$s_n = \sup\left\{|\varphi(x)| \mid \delta_0/2^{n+1} \leqslant x \leqslant \delta_0/2^n\right\}.$$

D'après (17), (18), (20) on a

$$\left|\varphi(\delta) - 2^{\alpha-1}\varphi(2\delta)\right| \leqslant \frac{1}{2}\omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \delta_0),$$

il en résulte $s_{n+1} \leqslant 2^{\alpha-1}s_n + \frac{1}{2}\omega\left(\delta_0/2^{n+1}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, d'où $s_n \to 0$, c.-à-d. (19) est vérifiée.

3. Le cas $\alpha > 1$. Soit $0 \leqslant x \leqslant \delta_0$. En écrivant $\alpha = 1 + p$ (donc $p > 0$), on obtient pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ les relations

$$\left|f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - 2f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{x^\alpha}{2^{k\alpha}}\omega\left(\frac{x}{2^k}\right) \leqslant \frac{x^\alpha}{2^k 2^{kp}}\omega\left(\frac{x}{2}\right),$$

d'où

$$2^{k-1} f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - 2^k f\left(\frac{x}{2^k}\right) = \varepsilon_k, \qquad |\varepsilon_k| \leqslant \frac{1}{2^{kp}} \cdot \frac{x^{\alpha'}}{2} \omega\left(\frac{x}{2}\right).$$

La sommation sur $k = 1, \ldots, n$ donne

$$f(x) - 2^n f(x/2^n) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n. \tag{21}$$

De la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \left(= \frac{1}{2^p - 1}\right)$, il découle l'existence de

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

(pour $x \geqslant 0$ quelconque: on a $x/2^n \leqslant \delta_0$ à partir d'une certaine valeur de n). Il résulte de (21) que

$$|f(x) - a(x)| \leqslant \frac{x^\alpha}{2} \cdot \frac{\omega(x/2)}{2^p - 1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \delta_0),$$

la différence $h(x) = f(x) - a(x)$ satisfait donc bien à (14), et il reste à montrer que $a : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ est additive. Soient donc $x, y \geqslant 0$; on a d'après (16) (ou (17)) $a(x+y) - a(x) - a(y) = \lim_{n\to\infty} 2^n \left[f\left(\frac{x+y}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right] = 0$.

La démonstration du lemme suivant n'est pas difficile, elle est omise.

LEMME. *Soient $\alpha \geqslant 0$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, où $f(0) = 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

$$f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x) = o(y^\alpha) \qquad (x \leqslant 0 \leqslant x + 2y,\ y \downarrow 0), \tag{22}$$

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = o\left(\max\{|x|^\alpha, |y|^\alpha\}\right) \qquad (\max\{|x|, |y|\} \downarrow 0).$$

THÉORÈME 3. *Soient $\alpha \geqslant 0, \alpha \neq 1$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction satisfaisant à (22). Alors il existe une fonction additive $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, telle que f admette une représentation*

$$f(x) = f(0) + a(x) + o(|x|^\alpha) \qquad (x \to 0). \tag{23}$$

Pour démontrer ce théorème, on applique le lemme à la fonction $f(x) - f(0)$, et on utilise les théorèmes 1, 2. Les théorèmes 2, 3 deviennent faux, si $\alpha = 1$: pour donner un contre–exemple, on choisit $\eta \in]0,1]$, et on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les formules

$$f(0) = 0, \quad f(x) = x\log(-\log|x|) \qquad (0 \neq |x| < \eta),$$

avec $f(x)$ arbitraire, si $|x| \geqslant \eta$.

3. La dérivée seconde au sens de Dinghas

Dinghas [3] a introduit une n–ième dérivée généralisée $D^n f(\xi)$ d'une fonction réelle f en un point ξ de $\mathbb{R}$ (voir aussi [6], [7]). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}$, alors $D^2 f(\xi)$ est donnée par l'expression

$$D^2 f(\xi) = \lim_{x \leqslant \xi \leqslant x+2y,\ y \downarrow 0} \frac{f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)}{y^2}$$

(où x et y sont des variables). Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette la forme

$$f(\xi + t) = f(\xi) + a(t) + ct^2 + o(t^2) \qquad (t \to 0),$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction additive et c une constante. Alors on voit aisément que $D^2 f(\xi) = 2c$. Inversement on a le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, telle que la dérivée $D^2 f(\xi)$ existe (et ait une valeur finie). Alors on a*

$$(24) \qquad f(\xi + t) = f(\xi) + a(t) + \frac{1}{2} D^2 f(\xi) \cdot t^2 + o(t^2) \qquad (t \to 0),$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction additive.

DÉMONSTRATION. Pour la fonction $g(t) = f(\xi + t) - f(\xi) - \frac{1}{2} D^2 f(\xi) \cdot t^2$ $(t \in \mathbb{R})$ on a $D^2 g(0) = 0$, c.–à-d.

$$\lim_{x \leqslant 0 \leqslant x+2y,\ y \downarrow 0} \frac{g(x+2y) - 2g(x+y) + g(x)}{y^2} = 0.$$

D'après le théorème 3, il en résulte (voir (23) avec f remplacée par g)

$$(25) \qquad g(t) = a(t) + o(t^2) \qquad (t \to 0),$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est additive. De (25) il découle (24).

Références bibliographiques

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Birkhäuser, Bâle 1961. (Version anglaise: Academic Press, New York 1966).

[2] J. Aczél et J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, University Press, Cambridge 1989.

[3] A. Dinghas, *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. AI, n° 375 (1966).

[4] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), 222–224.

[5] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities, Cauchy's equation and Jensen's inequality*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovie 1985.

[6] A. Simon et P. Volkmann, *Eine Charakterisierung von polynomialen Funktionen mittels der Dinghasschen Intervall-Derivierten*, Results Math. **26** (1994), 382–384.

[7] P. Volkmann, *Die Äquivalenz zweier Ableitungsbegriffe*, Thèse, Université Libre de Berlin 1971.

Postscriptum. Le théorème 1 est déjà essentiellement contenu dans les articles [10], [11] de Skof; voir aussi Kominek [9] et Gajda [8]. Récemment Tabor et Tabor [12] ont donné une amélioration du théorème 1, où la constante $6b$ de l'inégalité (4) est remplacée par $4b$.

Références bibliographiques supplémentaires

[8] Z. Gajda, *Local stability of the functional equation characterizing polynomial functions*, Ann. Polon. Math. **52** (1990), 119–137.

[9] Z. Kominek, *On a local stability of the Jensen functional equation*, Demonstratio Math. **22** (1989), 499–507.

[10] F. Skof, *Sull'approssimazione delle applicazioni localmente δ-additive*, Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fiz. Mat. Natur. **117** (1983), 377–389.

[11] F. Skof, *Proprietà locali e approssimazione di operatori*, Rendiconti Sem. Mat. Fis. Milano **53** (1983), 113–129 (1986).

[12] J. Tabor et J. Tabor, *Remark 15*, 34th International Symposium on Functional Equations: Aequationes Math. **53** (1997), 192–193.

Département de Mathématiques
Université d'Orléans
45067 Orléans Cedex 2, France

Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
76128 Karlsruhe, Allemagne