Annales Mathematicae Silesianae 8. Katowice 1994, 59–68

Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 1444

SUR DES FONCTIONS DES NIVEAUX INVARIANTEMENT ORDONNÉS

ZENON MOSZNER

Résumé. On considère des fonctions remplissantes la condition (3) et dans le cas particulaire l'implication (1). On donne des conditions sous lesquelles ces fonctions sont généralament homogènes.

On considère dans quelques problèmes en économie, en architecture, en sciences naturelles, en sciences sociales etc. une fonction $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$, où $\mathbb{R}_{++}$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs, remplissante la condition

$$u(p) < u(q) \Rightarrow u(\lambda p) < u(\lambda q), \tag{1}$$

pour chaque $p, q \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $\lambda \in \Lambda := \{(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{n_m}) \in \mathbb{R}^n_{++}\}$, où $n_1, \dots, n_m$ sont fixés et $n_1 + \dots + n_m = n$, ou la condition

$$u(p) = u(q) \Rightarrow u(\lambda p) = u(\lambda q), \tag{2}$$

qui résult de l'implication (1).

On peut généraliser ces conditions de la manière suivante.

Soit $u : X \to Y$ une fonction et B un groupe des bijections de l'ensemble X avec la superposition des bijections comme l'opération. Soit Y un ensemble linéairement ordonné par la relation "$<$" et considérons la condition:

$$\bigwedge_{p,q \in X} \bigwedge_{T \in B} : u(p) < u(q) \Rightarrow u(T(p)) < u(T(q)). \tag{3}$$

Received November 2, 1993.
AMS (1991) subject classification: Primary 39B40.

On peut remplacer dans cette condition l'implication par l'équivalence puisque B forme un groupe. Il en résulte que

$$(4) \qquad \bigwedge_{p,q \in X} \bigwedge_{T \in B} : u(p) = u(q) \Rightarrow u(T(p)) = u(T(q)).$$

Les fonctions remplissantes cette condition sont l'objet de la note [3]. Ici nous occuperons des fonctions qui satisfont à la condition (3) (ou (1)).

Supposons que la fonction u remplie (3), donc aussi (4). La relation $p\rho q \Leftrightarrow u(p) = u(q)$ est une équivalence, on peut donc considérer la famille X/ρ des classes d'équivalence de cette relation. Nous nommons ces classes les niveaux de la fonction u. La condition (4) est équivalente à la suivante

$$\bigwedge_{p \in X} \bigwedge_{T \in B} : T([p]) = [T(p)],$$

où $[p]$ désigne le niveau de u auquel appartient p. On peut donc nommer ces niveaux comme les niveaux invariants par rapport aux transformations du groupe B.

Prenons la définition suivante:

$$(5) \qquad [p] < [q] \Leftrightarrow u(p) < u(q).$$

On peut facilement démontrer que la relation "$<$" sur X/ρ est bien définie, que X/ρ est linéairement ordonnée par cette relation et que

$$(6) \qquad \bigwedge_{[p],[q] \in X/\rho} \bigwedge_{T \in B} : [p] < [q] \Rightarrow T([p]) < T([q]).$$

Les niveaux de u sont donc invariantement ordonnés par la relation "$<$" par rapport aux bijections de B.

Si $u : X \to Y$ remlit (4) et si nous considérons l'application $(u(p), T) \to u(T(p))$, nous recevons une fonction $F : u(X) \times B \to u(X)$ bien définie, puisque la définition de F ne dépend pas du choix de p. On a donc

$$(7) \qquad u(T(p)) = F(u(p), T),$$

d'où

$$F(y, T_1T_2) = F(u(p), T_1T_2) = u(T_1T_2(p))$$

et

$$F(F(y, T_2), T_1) = F(F(u(p), T_2), T_1) = F(u(T_2(p)), T_1) = u(T_1(T_2(p)))$$

et de là

$$(8) \qquad F(F(y,T_2),T_1) = F(y,T_1T_2)$$

pour chaque $y \in u(X)$ et T_1, T_2 dans B. La fonction F remplit donc l'équation de translation (de transformation) (8). De plus si nous désignons par I l'élément neutre du groupe B nous voyons d'après (7) que

$$(9) \qquad F(y,I) = y \qquad \text{pour chaque} \quad y \in u(X).$$

La fonction F remplit donc aussi la condition (9) nommée la condition d'idéntité.

Si u remplit (3) dans ce cas d'après (7) la fonction F remplit

$$(10) \qquad \bigwedge_{y,z \in u(X)} \bigwedge_{T \in B} : \ y < z \Rightarrow F(y,T) < F(z,T),$$

la fonction $F(\cdot,T)$ est donc croissante pour chaque T de B.

Passons à présent à la fonction $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$. Le problème suivant se pose dans les applications des fonctions u remplissantes (1): quelles sont des conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'il existe une surjection croissante ψ de $u(X)$ sur $\mathbb{R}_{++}$ pour laquelle

$$(11) \qquad \psi(u(\lambda p)) = \psi(u(p))\lambda_1^{c_1} \dots \lambda_m^{c_m}$$

pour $c_1, \dots, c_m$ réels, pas tous zéro.

Dans ce cas la fonction $\psi(u(p))$ est une fonction homogène et la fonction $u(p)$ est nommée généralement homogène.

THÉORÈME 1. *Ils existent pour une fonction $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ des constantes $c_1, \dots, c_m$, pas toutes zéro et une fonction $\psi : u\left(\mathbb{R}^n_{++}\right) \to \mathbb{R}_{++}$ surjective et croissante telles que* (11) *a lieu si et seulement si* (1) *a lieu et*

(a) *il existe $q \in \mathbb{R}^n_{++}$ tel que l'ensemble*

$$D(q) := \{(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_m) : \ u(q) < u(\lambda q)\}$$

forme un demi-espace ouvert de $\mathbb{R}^m$ déterminé par un hyperplan $H(q)$ à $m-1$ dimensions, passant par 0 et

(b) *il existe $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ tel que*

$$u(\Lambda p) := \{u(\lambda p) : \ \lambda \in \Lambda\} = u\left(\mathbb{R}^n_{++}\right).$$

Si de plus u $\left(\mathbb{R}^n_{++}\right)$ *forme un intervalle,* ψ *comme une surjection sur* $\mathbb{R}_{++}$ *croissante, doit être continue, alors elle est un homeomorphisme. Il en résulte d'après* (11) *que* $\lambda \to u(\lambda p)$ *doit être continue pour chaque* $p \in \mathbb{R}^n_{++}$.

DÉMONSTRATION de "seulement si". Si $u(p) < u(q)$ on a $\psi(u(p)) < \psi(u(q))$, d'où $\psi(u(p))\lambda^c < \lambda(u(q))\lambda^c$, où $\lambda^c := \lambda_1^{c_1} \ldots \lambda_m^{c_m}$, et de là $\psi(u(\lambda p)) < \psi(u(\lambda q))$, d'où $u(\lambda p) < u(\lambda q)$. Nous avons donc (1).

Remarquons que d'après (11) nous avons l'équivalence

$$u(q) < u(\lambda q) \Leftrightarrow \lambda^c > 1,$$

d'où on a (a) pour chaque $q \in \mathbb{R}^n_{++}$.

La condition (b) est évidente pour chaque p de $\mathbb{R}^n_{++}$ puisque

$$u(\lambda p) = \psi^{-1}(\psi(u(p))\lambda^c).$$

DÉMONSTRATION de "si". Nous avons

$$H(q) = \{(\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_m) : \; u(q) = u(\lambda q)\},$$

puisque on a

$$u(q) < u(\lambda q) \Leftrightarrow \ln \lambda := (\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_m) \in D(q),$$

et d'après (1)

$$u(q) > u(\lambda q) \Leftrightarrow -\ln \lambda \in D(q).$$

Remarquons que d'après (2), qui est la conséquence de (1), la condition (b) implique que $u(\Lambda r) = u(\mathbb{R}^n_{++})$ pour chaque r de $\mathbb{R}^n_{++}$. En effet d'après (b) il existe $\mu \in \Lambda$ tel que $u(\mu p) = u(r)$, alors $u(p) = u(\mu^{-1} r)$, et pour chaque s de $u(\mathbb{R}^n_{++})$ il existe un $\lambda \in \Lambda$ tel que $u(s) = u(\lambda p)$. Il en résulte que $u(s) = u(\lambda\mu^{-1} r)$, c.q.f.d.

Prenons $\psi(u(q))$ arbitraire dans $\mathbb{R}_{++}$ et soit $x \in u\left(\mathbb{R}^n_{++}\right)$. Il existe λ tel que $u(\lambda q) = x$. Posons

$$\psi(x) = \psi(u(\lambda q)) := \psi(u(q))\lambda^c,$$

où $c = (c_1, \ldots, c_m)$ et $c_1 z_1 + \ldots + c_m z_m = 0$ est tel équation de notre hyperplan $H(q)$ que $D(q) = \{(z_1, \ldots, z_m) : \; c_1 z_1 + \ldots + c_m z_m > 0\}$. Cette fonction est bien définie, car si $u(\mu q) = u(\lambda q)$, alors d'après (2): $u(\lambda^{-1}\mu q) = u(q)$ et de là $\lambda^{-c}\mu^c = 1$. Il en résulte que $\lambda^c = \mu^c$, alors $\psi(u(q))\mu^c = \psi(u(q))\lambda^c$. On voit aussi que ψ est une application sur $\mathbb{R}_{++}$.

Nous allons démontrer que (11) a lieu. Il existe pour $r \in \mathbb{R}^n_{++}$ un λ_1 tel que $u(\lambda r) = u(\lambda_1 q)$ et de là

$$\psi(u(\lambda r)) = \psi(u(\lambda_1 q)) = \psi(u(q))\lambda_1^c.$$

Nous avons de (2): $u(r) = u(\lambda^{-1}\lambda_1 q)$, alors

$$\psi(u(r)) = \psi(u(q))\lambda^{-c}\lambda_1^c = \psi(u(\lambda r))\lambda^{-c},$$

d'où (11).

Il suffit donc montrer que la fonction ψ est croissante. Soient $x, y \in u(\mathbb{R}^n_{++})$ et $x < y$. Dans ce cas $x = u(\lambda q)$, $y = u(\mu q)$ et $x < y$ nous donne $u(q) < u\left(\lambda^{-1}\mu q\right)$, alors $\left(\lambda^{-1}\mu\right)^c > 1$, donc $\mu^c > \lambda^c$ et de là $\psi(u(q))\mu^c > \psi(u(q))\lambda^c$. Nous avons donc $\psi(u(\mu q)) > \psi(u(\lambda q))$, alors $\psi(y) > \psi(x)$. La démonstration du Théorème 1 est donc achevée. □

Le lemme suivant est vrai.

Lemme. *Si $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ remplit (1), $u(\mathbb{R}^n_{++})$ forme un intervalle et la fonction*

$$t \to u((\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1+\dots+n_{\nu-1}}, \underbrace{t, \dots, t}_{n_\nu}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_{\nu+1}+\dots+n_m})p), \quad t \in \mathbb{R}_{++} \tag{12}$$

est mesurable (L) pour chaque $\nu = 1, \dots, m$ et pour chaque p de $\mathbb{R}^n_{++}$ dans ce cas la fonction $\lambda \to u(\lambda p)$ est continue pour chaque $p \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Démonstration. En prenant comme les bijections sur $\mathbb{R}^n_{++}$ les transformations de la forme $p \to \lambda p$ pour λ dans Λ, nous recevons le groupe B pour lequel u remplit (3). On peut donc la fonction $F(y, T)$, formée comme plus haut pour la fonction u, considérer sous la forme $F(y, \lambda)$, où

$$\bigwedge_{y \in u(\mathbb{R}^n_{++})} \bigwedge_{\lambda, \mu \in \Lambda} : F(F(y, \lambda), \mu) = F(y, \lambda\mu), \tag{13}$$

$$\bigwedge_{y \in u(\mathbb{R}^n_{++})} : F(y, (1, \dots, 1)) = y, \tag{14}$$

$$\bigwedge_{p \in \mathbb{R}^n_{++}} \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} : u(\lambda p) = F(u(p), \lambda) \tag{15}$$

et

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\ \bigwedge_{y,z\in u(\mathbb{R}^n_{++})} : y < z \Rightarrow F(y,\lambda) < F(z,\lambda).$$

Il résulte de la dernière condition que la fonction $y \to F(y,\lambda)$ est continue pour chaque $\lambda \in \Lambda$, puisque $u(\mathbb{R}^n_{++})$ forme un intervalle et d'après (13), (14) et (15) on a $F(u(\mathbb{R}^n_{++}),\lambda) = u(\mathbb{R}^n_{++})$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$.

Considérons les fonctions

$$H_\nu(y,t) = F(y, \underbrace{1,\dots,1}_{n_1+\dots+n_{\nu-1}}, \underbrace{t,\dots,t}_{n_\nu}, \underbrace{1,\dots,1}_{n_{\nu+1}+\dots+n_m})$$

et $G_\nu(y,\alpha) := H_\nu(y,e^\alpha)$ pour $\nu = 1,2,\dots,m$. La fonction $t \to H_\nu(y,t)$ est mesurable (L) sur $\mathbb{R}_{++}$ pour chaque $\nu = 1,\dots,m$ et chaque $y \in u(\mathbb{R}^n_{++})$ d'après (15). On a aussi

$$\bigwedge_{y\in u(\mathbb{R}^n_{++})}\ \bigwedge_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} : G_\nu(G_\nu(y,\alpha),\beta) = G_\nu(y,\alpha+\beta),$$

$$\bigwedge_{y\in u(\mathbb{R}^n_{++})} : G_\nu(y,0) = y.$$

La fonction $y \to G_\nu(y,\alpha)$ est continue pour chaque α de $\mathbb{R}$ et de plus $\alpha \to G_\nu(y,\alpha)$ est mesurable (L) pour chaque y de $u(\mathbb{R}^n_{++})$. Il en résulte d'après [4] que G_ν est une fonction continue et de là la fonction F comme la superposition des fonctions $G_\nu(y, \ln\beta)$ pour $\beta \in \mathbb{R}_{++}$ est aussi continue. Nous avons donc la thèse d'après (15). □

REMARQUE 1. Il résulte de la démonstration plus haut que nous recevons aussi le lemma vrai si nous remplaçons dans le lemme démontré la condition que la fonction (12) est mesurable (L) pour chaque ν ou que la fonction $\lambda \to u(\lambda p)$ est continue sur Λ par la condition que la fonction (12) est mesurable (L) ou continue pour un ν fixé dans l'ensemble $\{1,\dots,m\}$. La même remarque est vraie si nous remplaçons partout le tour "pour chaque p de $\mathbb{R}^n_{++}$" par "pour un p de $\mathbb{R}^n_{++}$".

REMARQUE 2. Notre lemme est aussi vrai si nous remplaçons la supposition que la fonction (12) soit mesurable (L) pour chaque $\nu = 1,\dots,m$ et pour chaque $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ par la condition que la fonction $(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \to u(\lambda p)$ soit mesurable (L) sur $\mathbb{R}^m_{++}$ pour chaque $p \in \mathbb{R}^n_{++}$. Pour cela montrer il suffit d'après la démonstration du lemme faire voir que la fonction

$$t \to H_\nu(y,t) \tag{16}$$

est mesurable (L) pour chaque $y \in u(\mathbf{R}^n_{++})$ et $\nu = 1, \dots, m$. Soit $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et fixons ν dans l'ensemble $\{1, \dots, m\}$. Ils existent $\mu_1, \dots, \mu_{\nu-1}, \mu_{\nu+1}, \dots, \mu_m$ réels tels que pour chaque $y \in \mathbf{Q} \cap u(\mathbf{R}^n_{++})$ la fonction

$$t \to F(y, \mu_1, \dots, \mu_1, \dots, \mu_{\nu-1}, \dots, \mu_{\nu-1}, t, \dots, t, \\ \mu_{\nu+1}, \dots, \mu_{\nu+1}, \dots, \mu_m, \dots, \mu_m)$$

est mesurable (L) sur $\mathbf{R}_{++}$. Cela résulte du théorème de Fubini puisque l'ensemble $\mathbf{Q} \cap u(\mathbf{R}^n_{++})$ est dénombrable et $\lambda \to F(y, \lambda)$ est mesurable sur $\mathbf{R}^m_{++}$ pour chaque $y \in u(\mathbf{R}^n_{++})$. La fonction

$$y \to F(y, \mu_1^{-1}, \dots, \mu_1^{-1}, \dots, \mu_{\nu-1}^{-1}, \dots, \mu_{\nu-1}^{-1}, 1, \dots, 1, \\ \mu_{\nu+1}^{-1}, \dots, \mu_{\nu+1}^{-1}, \dots, \mu_m^{-1}, \dots, \mu_m^{-1})$$

est continue sur $u(\mathbf{R}^n_{++})$, donc d'après (13) la fonction (16) est mesurable (L) pour chaque $y \in \mathbf{Q} \cap u(\mathbf{R}^n_{++})$.

Soit à présent $y \in u(\mathbf{R}^n_{++})$, $y_n \in \mathbf{Q} \cap u(\mathbf{R}^n_{++})$ et $y_n \to y$. Dans ce cas

$$H_\nu(y_n, \mu) \to H_\nu(y, \mu)$$

puisque la fonction $F(\cdot, \lambda)$ est continue, donc la fonction (16) est mesurable (L) pour chaque $y \in u(\mathbf{R}^n_{++})$, c.q.f.d.

De même façon si nous supposons que la fonction

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_m) \to u((\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \\ \lambda_{\nu-1}, \dots, \lambda_{\nu-1}, 1, \dots, 1, \lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_m)p), \tag{17}$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m-1}_{++}$, soit mesurable (L) nous recevons la mesurabilité de la fonction (12) avec μ au lieu de ν pour $\mu = 1, \dots, \nu - 1, \nu + 1, \dots, m$ et de là on a la continuité de la fonction $\lambda \to u(\lambda p)$ sur $\overline{\Lambda}_\nu$, où

$$\overline{\Lambda}_\nu := \{\lambda \in \Lambda : \lambda_j = 1 \text{ pour } \quad j = n_1 + \ldots + n_{\nu-1} + 1, \dots, n_1 + \ldots + n_{\nu-1} + n_\nu\}.$$

Le fin de la Remarque 1 est aussi ici valable.

Remarque 3. On ne peut pas remplacer dans le lemme la supposition (1) par la supposition plus faible (2). En effet posons pour $n = 1$:

$$u(p) = \begin{cases} -(p-1)^{-1} & \text{pour } \quad p \in (0,1), \\ 1 & \text{pour } \quad p = 1, \\ -p^{-1} + 1 & \text{pour } \quad p \in (1, \infty). \end{cases}$$

Cette fonction remplit (2) comme une bijection de $\mathbb{R}_{++}$ sur $\mathbb{R}_{++}$, la fonction $\lambda \to u(\lambda p)$ est mesurable (L) pour chaque p et elle n'est pas continue (p.ex. pour $p = 1$ au point 1). Cette fonction ne remplit pas (1) puisque pour $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, $\lambda = 3$ on a $u(p) = \frac{3}{2} < 3 = u(q)$ et $u(\lambda p) = u(1) = 1 > \frac{1}{2} = u(2) = u(\lambda q)$.

Remarque 4. La fonction u dans le lemme ne doit pas être continue, même que la fonction F dans la démonstration de ce lemme et remplissante (7) est continue. En effet la fonction ($n = 2$, $m = 1$):

$$u(x,y) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \neq y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}, \\ 2x & \text{pour} \quad x = y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}, \end{cases}$$

est une fonction homogène du dégre 1, donc elle remplit (1) et la fonction $F(y,\lambda) = y\lambda$, donc elle est continue. La fonction u n'est pas continue puisque $\lim\limits_{y\to 1} u(1,y) = 1 \neq 2 = u(1,1)$. Mais si F est continue et

(i) $u(p)$ est continue sur l'ensemble

$$\mathbb{R}^n_* = \{p \in \mathbb{R}^n_{++} : p_1^2 + \ldots + p_{n_1}^2 = 1 \text{ et } p^2_{n_1+\ldots+n_\nu+1} + \ldots + p^2_{n_1+\ldots+n_{\nu+1}} = 1 \text{ pour } \nu = 1, \ldots, m\},$$

dans ce u est continue. En effet soit $q(k) \to q$ pour $q(k)$, $q \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $k \to \infty$ et soient $\lambda(k) \in \Lambda$ et tel que

$$\lambda_1(k) = \left[q_1^2(k) + \ldots + q^2_{n_1}(k)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_2(k) = \left[q^2_{n_1+1}(k) + \ldots + q^2_{n_1+n_2}(k)\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\ldots, \lambda_m(k) = \left[q^2_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}(k) + \ldots + q^2_{n_1+\ldots+n_m}(k)\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$p(k) = \frac{1}{\lambda(k)} q(k), \ \lambda \in \Lambda \text{ et tel que } \lambda_1 = \left[q_1^2 + \ldots + q^2_{n_1}\right]^{\frac{1}{2}}, \ldots,$$
$$\lambda_m = \left[q^2_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1} + \ldots + q^2_{n_1+\ldots+n_m}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad p = \frac{1}{\lambda} q.$$

Nous avons $p(k) \to p$ et $\lambda(k) \to \lambda$ si $k \to \infty$ et $p(k)$, $p \in \mathbb{R}^n_*$, d'où

$$u(q(k)) = u(\lambda(k)p(k)) = F(u(p(k)), \lambda(k)) \to F(u(p), \lambda) = u(\lambda p) = u(q),$$

c.q.f.d.

L'ensemble $\mathbb{R}^n_*$ est un sélecteur de la famille $\mathbb{R}^n_{++}/\rho$, où la relation ρ est définie comme il suit: $p\rho q \Leftrightarrow \bigvee \lambda \in \Lambda : q = \lambda p$. On ne peut pas remplacer dans (i) ce sélecteur par un sélecteur S arbitraire. En effet la fonction $u(x,y)$ plus haut est continue sur le sélecteur $S = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2_{++} : y \neq 1\}$, puisque $u(x,y) = 1$ sur S, n'étant pas continue en même temps.

Le lemme démontré nous permet affablir les conditions dans quelques théorèmes dans [2], si nous remplaçons en même temps dans ces théorèmes la condition (2) par (1). Nous avons par cette méthode le

THÉORÈME 2. *Soit $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ satisfait à (1). Ils existent un homeomorphisme $\psi : u(\mathbb{R}^n_{++}) \to \mathbb{R}_{++}$ et des constantes réelles $c_1, \dots, c_m$, pas toutes zéro, tels que (11) a lieu si et seulement si la fonction (12) est mesurable (L) pour chaque $\nu = 1, \dots, m$ et pour chaque $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, $u(\mathbb{R}^n_{++})$ forme un intervalle, il existe un $q \in \mathbb{R}^n_{++}$ tel que l'ensemble*

$$H(q) := \{(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_m) : u(\lambda q) = u(q)\}$$

forme un hyperplan à $m-1$ dimensions et il n'existe aucun point p de $\mathbb{R}^n_{++}$ pour lequel $u(\Lambda p) = \{u(p)\}$.

Ce théorème est la conséquence simple du Théorème 4 dans [2] et du Lemme.

THÉORÈME 3. *Ils existent pour la fonction $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ un homeomorphisme $\psi : u(\mathbb{R}^n_{++}) \to \mathbb{R}^n_{++}$ et les constantes $c_1, \dots, c_m$, pas toutes zéro, tels que (11) a lieu si et seulement si la fonction u n'est pas constate et remplit (1), $u(\mathbb{R}^n_{++})$ forme un intervalle, ils existent $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $\nu \in \{1, \dots, m\}$ tels que les fonction (12) et (17) sont mesurables (L) et $u(\Lambda_\nu p) = u(\mathbb{R}^n_{++})$, où*

$$\Lambda_\nu := \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1 + \dots + n_{\nu-1}}, \underbrace{t, \dots, t}_{n_\nu}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_{\nu+1} + \dots + n_m}) : t \in \mathbb{R}_{++}\}.$$

Ce théorème résulte du Théorème 5 dans [2] et d'après la Remarque 1 et le fin de la Remarque 2.

THÉORÈME 4. *Ils existent pour la fonction $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ un homeomorphisme $\psi : u(\mathbb{R}^n_+) \to \mathbb{R}_{++}$ est des constantes $c_1, \dots, c_m$, pas toutes zéro, tels que (11) a lieu si et seulement si $u(\mathbb{R}^n_{++})$ forme un intervalle, u n'est pas constante, elle satisfait à (1) et ils existent $p, q \in \mathbb{R}^n_{++}$ tels que la fonction (12) est mesurable (L) pour $\nu = 1, \dots, m$ et $u(\Lambda q) = u(\mathbb{R}^n_{++})$.*

Ce théorème est la conséquence du Théorème 6 dans [2] et du Lemme. Il suffit seulement remarquer que si la fonction (12) est mesurable (L), alors la fonction (12) avec r au lieu de p est mesurable (L) pour chaque r de $\mathbb{R}^n_{++}$, sous la supposition que $u(\lambda q) = u(\mathbb{R}^n_{++})$ pour un q. En effet si $u(r) = u(\alpha q)$

pour un α de Λ et $u(p) = u(\beta q)$ pour un β de Λ, donc d'après (2) (comme la conséquence de (1)) $u(\lambda r) = u(\lambda\alpha\beta^{-1}p)$, d'où la thèse.

THÉORÈME 5. *Ils existent pour la fonction* $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ *un homeomorphisme* $\psi : u(\mathbb{R}^n_{++}) \to \mathbb{R}_{++}$ *et des constantes* $c_1, \dots, c_m$ *tels que* (11) *a lieu si et soulement si* $u(\mathbb{R}^n_{++})$ *forme un intervalle,* u *satisfait à* (1), *la fonction (12) est mesurable (L) pour chaque* $\nu = 1, \dots, m$ *et chaque* $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et pour chaque* $\nu = 1, \dots, m$ *l'égalité* $u(\Lambda_\nu p) = \{u(p)\}$ *a lieu pour chaque* $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ *ou pour aucun.*

Ce théorème est conséquence simple du Théorème 7 dans [2].

REMARQUE 5. La fonction ψ dans les Théorèmes 2, 3, 4, 5 comme un homeomorphisme est croissante ou décroissante. On peut prendre qu'elle est croissante, puisque dans le cas contraire il suffit prendre $1/\psi$ au lieu de ψ, en remplassant en même temps les constantes $c_1, \dots, c_m$ par $-c_1, \dots, -c_m$.

REMARQUE 6. On peut remplacer dans les Théorèmes 2, 3, 4, 5 la condition que la fonction la fonction (12) est mesurable (L) ou que la fonction (17) est mesurable sur $\mathbb{R}^{m-1}_{++}$ par la condition: il existe $\lim_{\lambda\to 1} u(\lambda p)$ sur Λ_ν ou sur $\overline{\Lambda}_\nu$, d'après le raisonnement dans la démonstration du Théorème 2.1 dans [4, p. 12]. Il résulte de ce raisonnement et d'après le Corollaire 1.1 dans [4, p.13] que cette dernière condition est équivalente sous la supposition (1) à la continuité de $\lambda \to u(\lambda p)$. L'exemple dans la Remarque 3 montre qu'on ne peut pas remplacer dans les Théorèmes 2, 3, 4, 5 la condition (1) par (2).

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Aczél, *Some recent applications of functional equations to the social and behavioral sciences. Further problems*, sous presse dans Aequationes Math.

[2] J. Aczél, Z. Moszner, *New results on "scale" and "size" arguments justifying invariance properties of empirical indices and laws*, sous presse dans Math. Social Sci.

[3] Z. Moszner, *Sur les fonctions des niveaux invariants*, Opuscula Math. **14** (1994), 143–151.

[4] M.C. Zdun, *Continuous and differentiable iteration semigroups*, Uniwesytet Śląski, Katowice (1979).

INSTYTUT MATEMATYKI
WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
PODCHORĄŻYCH 2
30-084 KRAKÓW, POLOGNE