MANFRED KRTSCHA, PETER VOLKMANN*

ÜBER DIE STETIGKEIT EINER FUNKTION VON ZWEI VERÄNDERLICHEN UNTER MONOTONIE-BEDINGUNGEN

Abstract. Let T, E, F be topological spaces, and let E, F also be preordered with some compatibility between topology and order stucture. Theorem: *If $f(t, x): T\times E\to F$ is separately continuous with respect to its variables and monotone non-decreasing with respect to x, then f is continuous.* The case of ordered normed spaces E, F is discussed in detail.

1. Einleitung. Nachstehenden Satz von Jung findet man bei Demidovič [1] als Aufgabe 3207:

Die Funktion $f(t, x): \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sei in jeder Veränderlichen t, x (separat) stetig und bezüglich x (schwach monoton) wachsend. Dann ist f stetig.

Diese Tatsache wird in der folgenden Nr. 2 verallgemeinert: Die Veränderlichen t, x und die Werte von f variieren in topologischen Räumen T, E bzw. F, wobei E, F noch prägeordnet mit geeigneten Verträglichkeitsbedingungen zwischen Topologie und Präordnung vorausgesetzt werden. In Nr. 3 wird dann auf prägeordnete E, F eingegangen, in denen sich je zwei Elemente vergleichen lassen. In Nr. 4, 5, 6 werden ausführlich normierte Räume behandelt, welche durch einen Kegel geordnet (allgemeiner: durch einen Keil prägeordnet) sind. Daran anschließend ergeben sich in Nr. 7 Bemerkungen über quasimonoton wachsende Funktionen (im Sinne von Walter) und in Nr. 8 über heterotone Funktionen. Schließlich bringt Nr. 9 Zusammenhänge mit einem Satze von Dini.

Herrn Dr. Witold Jarczyk in Katowice sind wir für seinen Hinweis auf die oben erwähnte Aufgabe bei Demidovič sehr dankbar.

2. Der allgemeine Fall prägeordneter Räume. Es sei M eine durch $\leqslant$ *prägeordnete* Menge, d.h. $\leqslant$ soll reflexiv und transitiv sein. Für $a, b\in M$ sei

$$[a, b] = \{x \mid x\in M,\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

das von ihnen erzeugte *Ordnungsintervall. Eine Menge* $V\subset M$ werde *ordnungskonvex* genannt, wenn die Implikation

---

Manuscript received April 20, 1989.

AMS (1991) subject classification: 54C05, 54F05, 46B40.

* Fakultät für Mathematik, Universität Karlsruhe, Postfach 6980, W-7500 Karlsruhe 1, Deutschland.

$$a,\ b \in V \Rightarrow [a,\ b] \subset V$$

gilt. Es sei bemerkt, daß Ordnungsintervalle ordnungskonvexe Mengen sind.

Sind E, F prägeordnete Mengen, so heiße $f: E \to F$ *wachsend*, falls die Bedingung

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \qquad (x,\ y \in E)$$

erfüllt ist. Analog werden *fallende* Funktionen erklärt. Im übrigen wird neben $\leqslant$ auch das Symbol $\geqslant$ in seiner offensichtlichen Bedeutung benutzt werden.

SATZ 1. *Es seien T, E, F topologische Räume, E, F prägeordnet, und es gelte:*

I) *Für E: Zu jedem $x \in E$ und jeder Umgebung U von x gibt es $\underline{x}, \overline{x} \in U$ mit $x \in \operatorname{Int}[\underline{x}, \overline{x}]$.*[1]

II) *Für F: Jedes y in F besitzt eine Umgebungsbasis aus ordnungskonvexen Mengen.*

Ferner sei G eine offene Teilmenge von $T \times E$ und $f(t,\ x): G \to F$ eine Funktion, welche bezüglich t, x in T bzw. E (separat) stetig sowie in der Veränderlichen x wachsend ist. Dann ist f stetig.

Beweis. Es genügt, den Fall $G = T \times E$, also

$$f(t,\ x): T \times E \to F$$

zu betrachten. Nun sei $(t_0,\ x_0) \in T \times E$. Um die Stetigkeit von f in $(t_0,\ x_0)$ nachzuweisen, sei eine Umgebung V von $f(t_0,\ x_0)$ vorgelegt. Es gilt also

$$f(t_0, x_0) \in \operatorname{Int} V \subset V,$$

und wegen II) kann V ordnungskonvex vorausgesetzt werden. Da $x \to f(t_0,\ x)$ stetig in $x = x_0$ ist, existiert in E eine Umgebung U von x_0 mit

$$f(t_0,\ U) \subset \operatorname{Int} V.$$

Wegen I) gibt es $\underline{x}, \overline{x} \in U$ mit $x_0 \in \operatorname{Int}[\underline{x}, \overline{x}]$. Speziell gilt

$$f(t_0,\ \underline{x}), f(t_0,\ \overline{x}) \in \operatorname{Int} V.$$

Die Funktionen $t \to f(t, \underline{x})$, $t \to f(t,\ \overline{x})$ sind stetig in $t = t_0$, also findet man in T eine Umgebung Ω von t_0 mit

$$f(\Omega,\ \underline{x}),\ f(\Omega,\ \overline{x}) \subset \operatorname{Int} V. \tag{1}$$

$\Omega \times [\underline{x}, \overline{x}]$ ist eine Umgebung von (t_0, x_0), und für $(t, x) \in \Omega \times [\underline{x}, \overline{x}]$ gilt wegen der vorausgesetzten Monotonie von f

$$f(t,\ \underline{x}) \leqslant f(t,\ x) \leqslant f(t,\ \overline{x}). \tag{2}$$

Wegen (1) gilt $f(t,\ \underline{x}), f(t,\ \overline{x}) \in V$, und hieraus folgt mit (2), da V ordnungskonvex ist,

---

[1] $\operatorname{Int} A$ bezeichne das (topologische) Innere einer Menge A.

$$f(t, x) \in V \qquad ((t, x) \in \Omega \times [\underline{x}, \overline{x}]).$$

Somit ergibt sich $f(\Omega \times [\underline{x}, \overline{x}]) \subset V$.

BEMERKUNG. Satz 1 gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn G nicht offen vorausgesetzt wird; Beispiel: $T = E = F = \mathbf{R}$, $G = \{(t, x) \mid t, x \in \mathbf{R}, t+x = 0\}$. Dann ist jede Funktion $f(t, x): G \to \mathbf{R}$ separat stetig und in x wachsend.

3. Total prägeordnete Räume. Ist in einer prägeordneten Menge M die Bedingung

$$x \leqslant y, \; y \leqslant x \Rightarrow x = y \qquad (x, y \in M)$$

erfüllt, so soll $\leqslant$ eine *Ordnung* heißen. Sind in einer prägeordneten (bzw. geordneten) Menge M je zwei Elemente x, y vergleichbar, gilt also stets $x \leqslant y$ oder $y \leqslant x$, so wird die Präordnung (bzw. Ordnung) *total* genannt.

Nun sei M total prägeordnet. Dann wird definiert

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y, \; y \nleqslant x \qquad (x, y \in M)$$

(wobei $y \nleqslant x$ das Nichtbestehen von $y \leqslant x$ bedeutet). Weiter werden für $a, b \in M$ (unter Verwendung zweier Objekte $-\infty$, $+\infty$, welche nicht zu M gehören) die offenen Intervalle

$$(a, b) = \{x \mid x \in M, \; a < x < b\}, \qquad (a, +\infty) = \{x \mid x \in M, \; a < x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x \in M, \; x < b\}, \qquad (-\infty, +\infty) = M$$

eingeführt. Es ist dann

$$\{(a, b) \mid a, b \in M \cup \{-\infty, +\infty\}\}$$

eine Basis für eine Topologie, die wir die *Intervalltopologie* von M nennen. Der folgende Satz läßt sich leicht beweisen:

SATZ 2. *Es sei M eine total prägeordnete Menge, $\mathcal{T}$ bezeichne ihre Intervalltopologie. Nimmt man in $N \subset M$ die von $\mathcal{T}$ erzeugte Spurtopologie, so besitzt jedes $x \in N$ eine aus Ordnungsintervallen (der Form $[a, b] = \{y \mid y \in N, a \leqslant y \leqslant b\}$ mit $a, b \in N$) bestehende Umgebungsbasis.*

Ergänzend sei zunächst bemerkt, daß die durch $\mathcal{T}$ erzeugte Spurtopologie nicht die Intervalltopologie in N zu sein braucht; Beispiel: $M = \mathbf{R}$, $N = \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

In Satz 1 können nun sowohl für E als auch für F solche N genommen werden, wie sie in Satz 2 vorkommen. Den Spezialfall total geordneter Mengen E, F findet man bei Pfanzagl [5, S. 69]. Andererseits wird in [5, S. 58] die Rolle total prägeordneter Mengen in gewissen Anwendungen betont, und das ist einer der Gründe, warum wir uns mit ihnen hier so ausführlich befassen.

4. Normierte Räume. Es bezeichne N einen reellen normierten Raum mit Nullelement Θ. Für $A, B \subset N$, $a \in N$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ wird allgemein gesetzt

$$A \pm B = \{a \pm b \mid a \in A, \; b \in B\}, \; a \pm B = \{a\} \pm B, \; \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}, \; -A = (-1)A.$$

Für $a \in N$ und $\varrho \geqslant 0$ bezeichnet $S(a;\varrho) = \{x \mid \|x-a\| \leqslant \varrho\}$ die abgeschlossene Kugel um a mit Radius ϱ.

Unter einem *Keil* K werde eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von N verstanden, welche für $\lambda \geqslant 0$ die Eigenschaft $\lambda K \subset K$ besitzt. Durch die Festsetzung

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K \qquad (x,\ y \in N)$$

wird dann in N eine Präordnung $\leqslant$ erzeugt. Diese ist genau dann eine Ordnung, wenn K ein *Kegel* ist, d.h. ein Keil mit der Eigenschaft

$$K \cap (-K) = \{\Theta\}.$$

Wir nennen einen Keil K *körperhaft*, wenn $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$ ist, und wir nennen ihn *normal*, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß die Bedingung

$$(3) \qquad \|x\| = \|y\| = 1,\ \Theta \leqslant x,\ \Theta \leqslant y \Rightarrow \|x+y\| \geqslant \delta \qquad (x,\ y \in N)$$

erfüllt ist. Wie Krasnosel'skiĭ et al. [2, S. 38] schreiben, ist (3) die von M. G. Kreĭn für Kegel gegebene Definition der Normalität. Man sieht nun leicht ein: Jeder (3) genügende Keil ist tatsächlich ein Kegel. An dieser Stelle möchten wir noch bemerken, daß die Beschäftigung mit prägeordneten normierten Räumen nicht ohne Wert ist, denn sie spielen z.B. eine Rolle in der Theorie der Differentialungleichungen; man vergleiche etwa Redheffer [6].

Ein hier wichtiges Beispiel ist der mit einer beliebigen Menge A gebildete Banachraum

$$l^\infty(A) = \{x \mid x = (x_\alpha)_{\alpha \in A},\ x_\alpha \in \mathbf{R}\ (\alpha \in A),\ \|x\| = \sup_{\alpha \in A} |x_\alpha| < \infty\}$$

der auf A definierten, reellwertigen, beschränkten Funktionen. In ihm ist

$$l^\infty_+(A) = \{x \mid x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in l^\infty(A),\ x_\alpha \geqslant 0\ (\alpha \in A)\}$$

ein sowohl körperhafter als auch normaler Kegel.

Nach diesen Vorbereitungen geben wir zwei Sätze; die Beweise dazu werden in Nr. 5 geführt werden.

SATZ 3. *Ist N ein durch einen Keil K prägeordneter reeller normierter Raum, so gilt* $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$ *genau dann, wenn zu jedem $x \in N$ und jeder Umgebung U von x Elemente* $\underline{x},\ \overline{x} \in U$ existieren mit $x \in \operatorname{Int}[\underline{x},\ \overline{x}]$.

SATZ 4. *Ist N ein durch einen Keil K prägeordneter reeller normierter Raum, so ist K genau dann normal (also ein normaler Kegel), wenn jedes $x \in N$ eine Umgebungsbasis aus ordnungskonvexen Mengen besitzt.*

BEMERKUNGEN. 1. Satz 4 besagt, daß in Satz 1 für F ein prägeordneter normierter Raum genau dann genommen werden kann, wenn der die Präordnung erzeugende Keil ein normaler Kegel ist.

2. Genauso besagt Satz 3, daß in Satz 1 für E ein prägeordneter normierter Raum N genau dann genommen werden kann, wenn der $\leqslant$ erzeugende Keil K körperhaft ist. Natürlich kann dann für E auch jede offene Teilmenge eines

solchen Raumes N genommen werden. Jede beliebige Teilmenge kann nicht genommen werden, wie folgendes Beispiel zeigt: $T = F = \mathbf{R}$, $N = \mathbf{R}^2$ geordnet durch $K = \mathbf{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geqslant 0\}$, $E = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_1 + x_2 = 0\}$. Dann ist jede Funktion $f(t, x): \mathbf{R} \times E \to \mathbf{R}$ bezüglich $x \in E$ wachsend, aber da E zu $\mathbf{R}$ homöomorph ist, folgt aus der separaten Stetigkeit von f in t, x nicht notwendig die Stetigkeit von f.

Natürlich ist die Frage interessant, ob in Satz 1 für E ein Ordnungsintervall eines prägeordneten normierten Raumes N genommen werden kann. Das ist in der Tat der Fall, wenn N durch einen körperhaften Kegel K geordnet wird und bezüglich $\leqslant$ noch Verbandsstruktur besitzt, wenn zu $x, y \in N$ also $\sup\{x, y\}$ und $\inf\{x, y\}$ existieren (Beispiel: $N = l^\infty(A)$, $K = l^\infty_+(A)$). Auf den einfachen Beweis des entsprechenden (folgenden) Satzes werden wir nicht weiter eingehen.

SATZ 5. *In einem reellen normierten Raume N sei durch einen körperhaften Kegel eine Ordnung erklärt, bezüglich deren N ein Verband ist. Sind dann a, $b \in N$, so besitzt das Ordnungsintervall $E = [a, b]$ die in Satz 1 angegebene Eigenschaft* I).

5. Beweis der Sätze 3, 4. In dieser Nr. ist N durchweg ein reeller normierter Raum, und $\leqslant$ bezeichnet die in ihm durch einen Keil K induzierte Präordnung.

LEMMA 1. *Für $a, b \in N$ gilt $[a, b] = (a+K) \cap (b-K)$.*

Beweis. $(a+K) \cap (b-K) = \{x \mid x-a \in K, b-x \in K\} = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$.

Beweis des Satzes 3. Zunächst sei $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$. Es sei U eine Umgebung des Punktes x aus N; ohne Einschränkung sei $U = S(x; \varepsilon)$ mit einem $\varepsilon > 0$. Man kann $p \in \operatorname{Int} K$ mit $\|p\| \leqslant \varepsilon$ wählen. Dann gilt $\Theta \in \operatorname{Int}(p-K)$ und $\Theta \in \operatorname{Int}(-p+K)$, also auch (Lemma 1!) $\Theta \in \operatorname{Int}[-p, p]$. Es folgt $x \in \operatorname{Int}[x-p, x+p]$, und wegen $\|p\| \leqslant \varepsilon$ liegen $x-p$, $x+p$ in $U = S(x; \varepsilon)$.

Nun sei umgekehrt die soeben bewiesene Bedingung aus Satz 3 erfüllt. Dann gibt es speziell zu $x = \Theta$ ein Ordnungsintervall $[\underline{x}, \overline{x}]$ mit Θ als innerem Punkt. Wegen Lemma 1 ist des Innere von $(\underline{x}+K) \cap (\overline{x}-K)$ nicht leer, also ist auch $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$.

LEMMA 2. *Für $A, B \subset N$ ist $D = (A+K) \cap (B-K)$ eine ordnungskonvexe Menge.*

Beweis. Es seien $a, b \in D$ und $a \leqslant x \leqslant b$. Dann gilt $a \in A+K$, $x-a \in K$, und es folgt

$$x = a + (x-a) \in A + K + K \subset A + K. \tag{4}$$

Analog gilt $b \in B-K$, $x-b \in (-K)$, und es folgt

$$x = b + (x-b) \in B - K - K \subset B - K.$$

Hieraus ergibt sich mit (4) $x \in D$, also folgt aus $a, b \in D$ stets $[a, b] \subset D$.

Unser Satz 4 ergibt sich nun aus der Äquivalenz A) $\Leftrightarrow$ C) des nachstehenden Lemmas 3 in Verbindung mit der Tatsache, daß für eine ordnungskonvexe Menge $V \subset N$ auch λV und $x + V$ ($\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in N$) ordnungskonvex sind.

LEMMA 3. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

A) *K ist normal.*

B) *Mit einem $\varrho>0$ gilt die Implikation*

$$a,\ b\in S(\Theta;1)\Rightarrow[a,\ b]\subset S(\Theta;\varrho). \tag{5}$$

C) *Θ besitzt eine (Norm$-$)beschränkte, ordnungskonvexe Umgebung.*

D) *Mit einem $\varkappa>0$ gilt*

$$\Theta\leqslant x\leqslant y\Rightarrow\|x\|\leqslant\varkappa\|y\| \qquad (x,\ y\in N). \tag{6}$$

Beweis. A)$\Rightarrow$B): Es werde (3) mit einem $\delta>0$ vorausgesetzt. Wir nehmen an, (5) sei für jedes $\varrho>0$ falsch. Dann gibt es für $n=1,2,3,\dots$ Elemente a_n, b_n, $z_n\in N$ mit

$$a_n,\ b_n\in S(\Theta;1),\qquad a_n\leqslant z_n\leqslant b_n,\qquad \|z_n\|\geqslant n+3.$$

Hieraus ergeben sich für $x_n=\dfrac{z_n-a_n}{\|z_n-a_n\|}$, $y_n=\dfrac{b_n-a_n}{\|z_n-a_n\|}$ die Beziehungen

$$\Theta\leqslant x_n\leqslant y_n \qquad \text{mit} \qquad \|x_n\|=1,\qquad y_n\to\Theta. \tag{7}$$

Also wird

$$\Theta\leqslant x_n,\ \frac{y_n-x_n}{\|y_n-x_n\|},$$

und da hier rechts von Θ Elemente mit Norm eins stehen, liefert (3)

$$\left\|x_n+\frac{y_n-x_n}{\|y_n-x_n\|}\right\|\geqslant\delta,$$

d.h.

$$\|x_n\|y_n-x_n\|+y_n-x_n\|\geqslant\delta\|y_n-x_n\|.$$

Grenzübergang $n\to\infty$ liefert wegen (7) $\delta\leqslant 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

B) $\Rightarrow$C): Man bilde

$$V=\bigcup_{a,\ b\in S(\Theta;1)}[a,\ b].$$

Unter der Voraussetzung B) gilt $S(\Theta;1)\subset V\subset S(\Theta;\varrho)$, also ist V eine beschränkte Umgebung von Θ. Ferner ist nach Lemma 1

$$\begin{aligned}V&=\bigcup_{a,\ b\in S(\Theta;1)}((a+K)\cap(b-K))=\bigcup_{\|a\|\leqslant 1}(a+K)\cap\bigcup_{\|b\|\leqslant 1}(b-K)\\&=(S(\Theta;1)+K)\cap(S(\Theta;1)-K),\end{aligned}$$

und somit ist V nach Lemma 2 ordnungskonvex.

C) $\Rightarrow$D): Es sei V eine beschränkte, ordnungskonvexe Umgebung von Θ. Dann existieren α, $\beta>0$ mit

(8) $$S(\Theta;\alpha) \subset V \subset S(\Theta;\beta).$$

Zum Nachweis von (6) gelte

(9) $$\Theta \leqslant x \leqslant y.$$

Ist zunächst $y \neq \Theta$, so folgt

$$\Theta \leqslant \alpha \frac{x}{\|y\|} \leqslant \alpha \frac{y}{\|y\|},$$

und da Θ und $\alpha y/\|y\|$ in V liegen, ergibt sich aus der Ordnungskonvexität dieser Menge $\alpha x/\|y\| \in V$. Wegen (8) ist also $\|\alpha x\|/\|y\| \leqslant \beta$, d.h.

(10) $$\|x\| \leqslant (\beta/\alpha)\|y\|.$$

Ist in (9) $y = \Theta$, so folgt $\Theta \leqslant x \leqslant \Theta$, also $\Theta \leqslant \lambda x \leqslant \Theta \, (\lambda \geqslant 0)$, und wegen (8) gilt somit $\|\lambda x\| \leqslant \beta$ für alle $\lambda \geqslant 0$. Daher ist $x = \Theta$, und (10) ist auch in diesem Falle erfüllt. Aus dem Bestehen von (10) folgt (6) mit $\varkappa = \beta/\alpha$.

D) $\Rightarrow$ A): Unter der Voraussetzung D) soll (3) mit einem $\delta > 0$ bewiesen werden. Dazu sei $\Theta \leqslant x, y$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$. Es folgt $\Theta \leqslant x \leqslant x + y$, also mit (6) $1 = \|x\| \leqslant \varkappa \|x+y\|$. Somit kann $\delta = 1/\varkappa$ genommen werden.

6. Ergänzungen zum Falle der normierten Räume. Als erstes möchten wir zeigen, daß die Bedingungen I), II) des Satzes 1 im Falle $E = F$ im allgemeinen voneinander unabhängig sind, und zwar sogar im Falle eines geordneten Banachraumes $N = E = F$.

Im Hinblick auf die Sätze 3, 4 genügt es, in einem Banachraume einen normalen Kegel K mit $\operatorname{Int} K = \emptyset$ anzugeben (z.B. kann der Hilbertraum l^2 der quadratisch konvergenten, reellen Zahlenfolgen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ genommen werden mit $K = l^2_+ = \{x \mid x \in l^2; 0 \leqslant x_1, x_2, \ldots\}$) sowie in einem anderen Banachraume einen körperhaften Kegel K, welcher nicht normal ist. Für ein solches zweites Beispiel nehmen wir (mit $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$) den Banachraum

$$l^\infty = l^\infty(\mathbf{N}) = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots),\ x_n \in \mathbf{R},\ \|x\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n| < \infty\}.$$

In ihm ist

(11) $$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid x \in l^\infty,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant 0\}$$

ein Kegel, und es gilt $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$. Nun ist K nicht normal, denn anderenfalls müßte wegen der in Lemma 3 festgestellten Äquivalenz A) $\Leftrightarrow$ D) ein $m \in \mathbf{N}$ existieren mit

(12) $$\Theta \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant m\|y\| \qquad (x,\ y \in l^\infty).$$

Wählt man

(13) $$x = (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{m},\ m+1,\ 0,\ 0,\ \ldots), \quad y = (\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{m+1},\ 0,\ 0,\ \ldots),$$

so gilt

$$y-x=(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{m},\ -m,\ 0,\ 0,\ \ldots)\in K,$$

also ist $\Theta\leqslant x\leqslant y$. Hieraus folgt mit (12) $\|x\|\leqslant m\|y\| = m<m+1 = \|x\|$, was nicht geht. Am Rande sei erwähnt, daß der durch den Kegel (11) geordnete l^∞ ein Verband ist.

Nun eine Bemerkung zur Äquivalenz A)$\Leftrightarrow$B) des Lemmas 3: In Banachräumen kann man B) durch die viel einfacher zu formulierende Bedingung ersetzen, daß jedes Ordnungsintervall beschränkt sei (vgl.[2]). In unvollständigen normierten Räumen ist dieses im allgemeinen nicht richtig, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei N der aus den finiten Folgen $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ ($n\in\mathbf{N}$ variabel) bestehende Teilraum von l^∞. Mit K gemäß (11) ist dann

$$K_N = N\cap K$$

ein Kegel in N. Da die x, y in (13) Elemente von N sind, ist auch K_N nicht normal. Andererseits prüft man leicht nach, daß alle Ordnungsintervalle in N (Norm-)beschränkte Mengen sind.

7. Quasimonoton wachsende Funktionen. Der $\mathbf{R}^n$ werde durch den Kegel $\mathbf{R}^n_+ = \{x \mid x=(x_1,\ldots,x_n);\ x_1,\ldots,\ x_n\geqslant 0\}$ geordnet, und es sei $[a,\ b]$ ein Ordnungsintervall in $\mathbf{R}^n$. Nach Walter (vgl. [8]) heißt $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}^n$ (also $f=(f_1,\ \ldots, f_n)$ mit $f_\nu:[a,\ b]\to\mathbf{R}$; $\nu=1,\ \ldots,\ n$) *quasimonoton wachsend*, wenn jede der Funktionen

$$f_\nu = f_\nu(x_1,\ldots,\ x_n)$$

in den Veränderlichen $x_1,\ldots,x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, x_n$ wachsend ist. Sind die $f_\nu(x_1,\ldots, x_n)$ bezüglich der $x_1,\ldots,\ x_n$ auch noch (separat) stetig, so schließt man mit Hilfe von Satz 1 (oder Satz 5) sukzessive auf die Stetigkeit von f_ν in den Veränderlichen

$$(x_1,\ x_2),\ x_3,\ldots,\ x_n;\ (x_1,\ x_2,\ x_3),\ x_4,\ldots,\ x_n;\ldots;(x_1,\ldots,\ x_n),$$

also schließlich auf die Stetigkeit von $f_\nu:[a,\ b]\to\mathbf{R}$. Somit gilt nachstehender Satz.

SATZ 6. *Eine quasimonoton wachsende Funktion $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$: $[a,\ b]\to\mathbf{R}^n$ (mit $a,\ b\in\mathbf{R}^n$) ist genau dann stetig, wenn sie in den Variablen $x_1,\ldots, x_n$ (separat) stetig ist.*

8. Heterotone Funktionen. Es seien E, F durch Kegel K bzw. L geordnete Banachräume, und es sei $f:E\to F$ (der Einfachheit halber sei f auf ganz E definiert). In neuerer Zeit (vgl. etwa Opoĭcev [4] oder Kurpel' und Šuvar [3]) interessiert man sich für die Möglichkeit, f in der Form

$$f(x)=\Phi(x,\ x)\qquad (x\in E) \tag{14}$$

darzustellen, wobei

$$\Phi(y,\ z):E\times E\to F \tag{15}$$

bezüglich y wächst und bezüglich z fällt. Besteht eine solche Möglichkeit, so wird f in [4] *heteroton* genannt. Für endlich-dimensionale E, F mit körperhaften

K, L wird z.B. in [7] gezeigt, daß jedes stetige $f: E \to F$ heteroton ist, wobei die in (14), (15) auftretende Funktion $\Phi: E \times E \to F$ stetig gewählt werden kann.

Auch im unendlich-dimensionalen Falle ist man bei stetigem f an einem stetigen Φ interessiert. Satz 1 (in Verbindung mit den Sätzen 3, 4) zeigt, daß bei körperhaftem K und normalem L zum Nachweise der Stetigkeit von $\Phi(y, z)$ der Nachweis der Stetigkeit in jeder Veränderlichen genügt.

9. Zusammenhänge mit einem Satze von Dini. Der folgende Satz ist eine Version eines Dinischen Satzes.

SATZ 7. *Es sei T ein topologischer Raum, F ein durch einen normalen Kegel geordneter normierter Raum, und es seien*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots : T \to F$$

stetige Funktionen mit

$$\varphi_1(t) \geqslant \varphi_2(t) \geqslant \ldots \to \varphi_0(t) \qquad (t \in T) \tag{16}$$

(der Pfeil bedeutet Konvergenz im Sinne der Norm von F). Erklärt man

$$\varphi: T \times \left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\right\} \to F$$

durch

$$\varphi(t,\ x) = \begin{cases} \varphi_0(t) & (x = 0) \\ \varphi_n(t) & (x = 1/n), \end{cases}$$

so ist φ stetig. Ist noch T kompakt, so ist die Konvergenz (16) *gleichmäßig auf T.*

Beweis. Mit $E = \left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\right\}$ erfüllt $f = -\varphi$, $f: T \times E \to F$ nach Satz 2 und Satz 4 alle Voraussetzungen des Satzes 1. Also ist f (und damit auch φ) stetig. Für einen kompakten topologischen Raum T ergibt sich dann unmittelbar die Gleichmäßigkeit der Konvergenz (16).

Abschließend sei bemerkt, daß umgekehrt manche Fassung des Satzes 1 (insbesondere der in der Einleitung zitierte Satz von Jung) aus geeigneten Versionen des Dinischen Satzes herleitbar ist. Es wäre interessant zu wissen, wie weit diese Zusammenhänge wirklich gehen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. P. DEMIDOVIČ, *Sbornik zadač i upražnenii po matematičeskomu analizu*, Nauka, Moskva 1977.

[2] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ, G. M. VAĬNIKKO, P. P. ZABREĬKO, Ja. B. RUTICKIĬ und V. Ja. STECENKO, *Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin 1973 [Übersetzung aus dem Russichen].

[3] N. S. KURPEL', B. A. ŠUVAR, *Dvustoronnie operatornye neravenstva i ih primenenija*, Naukova Dumka, Kiev, 1980.

[4] V. I. OPOĬCEV, *Obobščenie teorii monotonnyh i vognutyh operatorov,* Trudy Moskov. Mat. Obšč. 36 (1978), 237—273.
[5] J. PFANZAGL, *Theory of measurement,* Physica-Verlag, Würzburg — Wien, 1971.
[6] R. REDHEFFER. *Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonotonen Funktionen in normierten linearen Räumen,* Arch. Rational Mech. Anal. 52 (1973), 121—133.
[7] P. VOLKMANN, *Zametka ob integral'nyh neravenstvah tipa Vol'terra,* Ukrain. Mat. Ž. 36 (1984), 393—395.
[8] W. WALTER, *Differential and integral inequalities,* Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — — New York, 1970 [Übersetzung aus dem Deutschen].