MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI*

ÜBER EIGENSCHAFTEN GEWISSER UNTERMENGEN DER KLEINSCHEN RÄUME

Zusammenfassung. Der Kleinschen Raum ist ein System aus drei Elementen (M, G, f) wo M eine beliebige nichtleere Menge ist, G eine gruppe bedeutet und die Abbildung $f: M \times G \longrightarrow M$ eine effektive linksseitige Wirkung von G auf M darstellt. In diesem Raume werden gewisse Untermengen, so genannte „affine Pseudogeraden", definiert, die eine Verallgemeinerung der Geraden im affinen Kleinschen Raume darstellen. In vorliegender Arbeit werden grudlegende Eigenschaften der affinen Pseudogeraden gegeben. Insbesondere wird es gezeigt, dass im allgemeinen viele verschiedene affine Pseudogerade durch zwei verschiedene Punkte druchgehen können. Darum werden einige notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit der affinen Pseudogeraden im Kleinschen Raume bewiesen, die zwei angegebene verschiedene Punkte enthalten. Endlich sind gewisse offene Probleme gestellt.

Einleitung. In vorliegender Arbeit sind gewisse Untermengen definiert, die im n-dimensionalen affinen Raume mit Gereden identisch sind, Die Untermengen stellen also eine Verallgemeinerung der affinen Geraden dar. Darum spielen sie eine wichtige Rolle in der Geometrie. Im weiteren werden diese Untermengen affine Pseudogeraden, kurz APG, genannt.

Es werden hinreichende und notwendige Bedingungen für die Eindeutigkeit der APG gegeben, die zwei verschiedene Punkte enthalten.

Im § 1 erinnere ich an die für weitere Betrachtungen grundlegenden Eigenschaften der Geraden im n-dimensionalen affinen Raume. Auf Grund dieser Eigenschaften werden im § 2 die APG im beliebigen Kleinschen Raume definiert. Dort werden auch einige einfache Eigenschaften der APG und ein von Z. Moszner gegebenes Beispiel dargestellt. Das Beispiel zeigt, dass die APG durch zwei verschiedene Punkte im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sind. Der nächste Paragraph enthält die notwendigen Bedingungen dafür, dass zwei verschiedene Punkte genau eine APG bestimmen. Die entsprechenden hinreichenden sind im § 4 gegeben. Alle erhaltenen Ergebnisse werden im § 5 versammelt und geordnet.

Received June 21, 1987
AMS (MOS) subject classification (1980). Primary 51N10. Secondary 51N30.
* Instytut Matematyki Politechniki Śląskiej, ul. Zwycięstwa 42, Gliwice, Poland.

Es ist zu beachten, dass die Definition der APG (2.2) als auch die obengenannten Bedingungen nur von den im beliegen Kleinschen Raume auftretenden Begriffen abhängig sind und keine zusätzliche Struktur erfordern.

Die Begriffe des Kleinschen Raumes, seiner Geometrie, der stationären Untergruppen u.s.w. sind im Handbuch [3] bzw. in der Arbeit [4] zu finden.

Mit ähnlichen Problemen hat sich auch K. Dębowski in der Arbeit [1] und in seiner Dissertation [2] beschäftigt.

1. Eigenschaften der Geraden im n-dimensionalen affinen Raume. Es sei ein n-dimensionaler affiner Raum gegeben. Er hat die Form

$$(R^n, GA(n,R), f), \quad f(x,A,a) := A.x + a. \tag{1.1}$$

Die Gerade in diesem Raume, welche durch zwei verschiedene Punkte $p_0 \neq p_1$ geht, ist die folgende Untermenge $L(p_0, p_1) \subset R^n$:

$$L(p_0, p_1) := \left\{ x \in R^n : \bigvee t \in R \quad x = p_0 + t(p_1 - p_0) \right\}. \tag{1.2}$$

Die Gerade (1.2) hat die nachstehende grundlegende Eigenschaft. Wenn eine affine Transformation f zwei verschiedene Punkte dieser Gerade nicht ändert, so wird auch jeder Punkt dieser bei der Transformation f nicht geändert. Mit Hilfe der stationären Untergruppen kann die obengenannte Eigenschaft auf folgende Weise ausdrücken.

Jedes Element der stationären Untergruppen zwei verschiedener Punkte $p_0 \neq p_1$ einer Gerade muss in der stationären Untergruppe beliebiges Punktes dieser Gerade enthalten werden, d.h. die folgende Relation gilt

$$\bigwedge p_0 \neq p_1 \ \bigwedge x \in L(p_0, p_1) \quad H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(x), \tag{1.3}$$

wobei $H(p_0)$, $H(p_1)$ und $H(x)$ die stationären Untergruppen ensprechender Punkte bedeuten. Das Symbol „ $\leqslant$ " zeigt, dass die linke Seite eine Untergruppe der rechten ist. Es zeigt sich überdies, dass die Bedingung (1.3) für Geraden im affinen Raume charakteristisch ist, d.h. jede Untermenge $S(p_0, p_1)$ aller Punkte x, die der Bedingung (1.3) genügen,

$$S(p_0, p_1) := \{ x \in R^n : \ H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(x) \}, \tag{1.4}$$

ist die durch die Punkte p_0, p_1 bestimmte Gerade. Wir haben also die Gleichheit

$$S(p_0, p_1) = L(p_0, p_1).$$

Darum kann man die Relation (1.4) als Definition der Gerade annehmen.

Die Definition hat den Vorteil, dass in dieser nur die Begriffe auftreten, die mit den Kleinschen Raumen verbunden sind und von zusätzlicher im affinen Raume eingeführter Struktur (Addieren und Multiplizieren mit reellen Zahlen) nicht abhängt. Darum kann diese Definition ohne weiteres auf beliebige Kleinsche Raume verallgemeinert werden. Da die Mengen (1.4) eine Verallgemeinerung der Geraden darstellen, die in jeder Geometrie eine wichtige Rolle spielen, scheint es verständlich diese in beliebigen Kleinschen Raume zu untersuchen. Mit den Problemen wollen wir uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigen.

Es ist wohl bekannt, dass in klassischen Räumen durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht. Es entstehet die Frage, ob die Untermengen (1.4) auch diese Eigenschaft haben. Das von Z. Moszner stammende Beispiel zeigt, dass Antwort auf diese Frage verneinend ist. Im Paragraphen 5 werden gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen für Eindeutigkeit der Untermengen (1.4) gegeben, (Satz 1).

2. Eigenschaften der affinen Pseudogeraden. Es sei ein beliebiger Kleinscher Raum

$$(M, G, f), \qquad |M| \geqslant 3, \tag{2.1}$$

gegeben. Man kann annehmen, dass Mächtigkeit der Menge M nicht kleiner als 3 ist. Andernfalls ist die Sache trivial.

DEFINITION 1. Die Untermenge $S(p_0, p_1) \subset M$

$$S(p_0, p_1) := \{x \in M\colon\ H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(x)\}, \tag{2.2}$$

wird eine durch zwei verschiedene Punkte bestimmte affine Pseudogerade genannt, die wir kurz mit „APG" bezeichnen werden.

Die affinen Pseudogeraden haben die folgenden Eigenschaften.

1. Durch zwei verschiedene Punkte geht wenigstens eine APG. Jede APG enthält wenigstens zwei verschiedene Punkte.

$$\bigwedge p_0, p_1 \in M,\ p_0 \neq p_1, \quad p_0 \in S(p_0, p_1), \quad p_1 \in S(p_0, p_1). \tag{2.3}$$

2. APG $S(p_0, p_1)$ ändert sich nicht, wenn die Punkte p_0 und p_1 umgetauscht werden,

$$\bigwedge p_0, p_1 \in M,\ p_0 \neq p_1, \quad S(p_0, p_1) = S(p_1, p_0). \tag{2.4}$$

3. Jede APG enthält alle einpunktigen transitiven Faser.

(2.5) Ist $\{p\}$, $p \in M$ eine einpunktige transitive Faser,

so $\bigwedge p_0, p_1 \in M,\ p_0 \neq p_1, \quad p \in S(p_0, p_1)$.

4. Jede durch zwei verschiedene einpunktige transitive Faser bestimmte APG ist Menge aller einpunktigen transitiven Faser gleich.

(2.6) Sind $\{p_0\}$ und $\{p_1\}$, $p_0 \neq p_1$, $p_0, p_1 \in M$, einpunktige transitive Faser, so $S(p_0, p_1)$ besteht aus allen einpunktigen transitiven Faser.

5. Jede durch einen Reper bestimmte APG ist mit dem ganzen Raum identich.

(2.7) Bildet die Menge $\{p_0, p_1\}$, $p_0, p_1 \in M$ einen Reper, so gilt die Gleichheit $S(p_0, p_1) = M$.

6. Im Kleinschen Raum (2.1) hat APG einen geometrischen Sinn, d.h. bei jeder Transformation f_a, wo a zur G gehört, geht APG in APG über.

(2.8)
$$\bigwedge p_0, p_1, \quad p_0 \neq p_1, \quad p_0, p_1 \in M$$
$$\bigwedge a \in G \quad f(S(p_0, p_1), a) = S(f(p_0, a), f(p_1, a)).$$

Beweis. Die Eigenschaften (2.3) und (2.4) folgen sofort aus der Definition (2.2) der Menge $S(p_0, p_1)$. In der Tat da der gemeinsame Teil $H(p_0), H(p_1)$ eine Untergruppe von $H(p_0)$ und $H(p_1)$ bildet, ist die in der Definition (2.2) auftretende Bedingung für die Punkte p_0 und p_1 erfüllt. Überdies der obenerwähnte gemeinsame Teil ändert sich nicht bei der Umtauschung der Faktoren. Daraus folgt (2.4). Um die Eigenschaft (2.5) zu zeigen, genügt es zu bemerken, dass ein Punkt p dann und nur dann einpunktige transitive Faser darstellt, wenn $H(p) = G$ gilt. Solcher Punkt muss immer die in der Definition (2.2) auftretende Bedingung erfüllen, es muss also zu jeder APG gehören.

Sind $\{p_0\}$ und $\{p_1\}$, $p_0 \neq p_1$, p_0, p_1 einpunktige transitive Faser, so gehört $x \in M$ dann und nur dann zur $S(p_0, p_1)$, wenn x auch eine einpunktige transitive Faser ist. Daraus folgt die Gleiehheit (2.6).

Bilden zwei Punkte p_0, p_1 aus M einen Reper, so folgt es aus der Definition des Repers, (vgl. [1, II. S. 47] bzw. [2]), die Gleichheit $H(p_0) \cap \cap H(p_1) = \{e\}$. Die Untergruppe $H(p_0) \cap H(p_1)$ muss also zur Untergruppe $H(x)$ für jedes x aus M gehören. Dies zeigt (2.7).

Endlich wird (2.8) gezeigt. Es seien zwei verschiedene Punkte $p_0 \neq p_1$ aus M gegeben. Wir nehmen einen beliebigen Punkt x aus $S(p_0, p_1)$. Dann gilt die Relation

(2.9)
$$H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(x).$$

Mit a wird ein beliebiges Element aus G bezeichnet. Da die transformation f_a eine Bijektion ist, sind die Bilder der Punkte p_0 und p_1 verschieden, d.h.

$$f_a(p_0) = f(p_0, a) \neq f(p_1, a) = f_a(p_1).$$

Überdies sind die stationären Untergruppen $H(f(p_0, a))$ und $H(f(p_1, a))$ konjugiert, genauer gesagt haben sie die Formen $H(f(p_i, a)) = aH(p_i)a^{-1}$, $i = 0,1$. Es wird die folgende Gleichheit

$$(2.10) \qquad (aH(p_0)a^{-1}) \cap (aH(p_1)a^{-1}) = aH(p_0) \cap H(p_1)a^{-1}$$

gezeigt. Zu diesem Zweck wählen wir ein g aus der linken Seite von (2.10). Dann existieren die Elemente $g_0 \in H(p_0)$ und $g_1 \in H(p_1)$ derart, dass $g = ag_0a^{-1}$ und $g = ag_1a^{-1}$ gilt. Daraus folgt $g_0 = g_1 \in H(p_0) \cap H(p_1)$ und $g \in aH(p_0) \cap H(p_1)a^{-1}$. Die linke Seite von (2.10) ist also in der rechten enthalten. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, wählen wir ein g aus $aH(p_0) \cap H(p_1)a^{-1}$. Dann gibt es ein Element $\tilde{g}$ aus $H(p_0) \cap H(p_1)$ derart, dass $g = a\tilde{g}a^{-1}$, d.h. g gehört zur $aH(p_0)a^{-1}$ und gleichzeitig zur $aH(p_1)a^{-1}$. Sie ist in der linken Seite von (2.10) enthalten. Auf diese Weise wird (2.10) gezeigt.

Mit Hilfe von (2.10) kann die Eigenschaft (2.8) folgendermassen bewiesen werden. Es wird ein $\tilde{x}$ aus $f(S(p_0, p_1), a)$ gewählt. Dann gibt es ein $x \in S(p_0, p_1)$ derart, dass $\tilde{x} = f(x,a)$. Aus der Definition APG ergibt sich die Inklusion $H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(x)$, aus deren die Relation

$$(2.11) \qquad aH(p_0) \cap H(p_1)a^{-1} \leqslant aH(x)a^{-1}$$

folgt. Wird die linke Seite von (2.11) durch diejenige von (2.10) ersetzt, so erhalten wir die Inklusion $H(f(p_0,a)) \cap H(f(p_1,a)) \leqslant H(f(x,a))$, die bedeutet, dass $\tilde{x} = f(x,a) \in S(f(p_0,a), f(p_1,a))$.

Auf diese Weise haben wir die Inklusion

$$(2.12) \qquad f(S(p_0,p_1), a) \subset S(f(p_0,a), f(p_1,a))$$

gezeigt. Um die umgekehrte Inklusion zu erhalten, werden p_0, p_1 und a in (2.12) entsprechend durch $f(p_0,a)$, $f(p_1,a)$ und a^{-1} ersetzt. Dann erhält man die Relation $f(S(f(p_0,a), f(p_1,a)), a^{-1}) \subset S(p_0,p_1)$, aus deren folgt

$$(2.13) \qquad S(f(p_0,a), f(p_1,a)) \subset f(S(p_0,p_1),a).$$

Die Inklusionen (2.12), (2.13) haben die Gleichheit (2.8) als Folge.

Jetzt werden einige Beispiele gegeben.

BEISPIEL 1. Wir betrachten zwei dimensionaler Vektorraum. Der Definition nach ist er durch den Dreitupel

$$(R^2, GL(2,R), f), \quad f(x,A) := A.x,$$

dargestellt. In diesem Raume bilden die Punkte $e_1(1,0)$ und $e_2(0,1)$ einen Reper. Auf Grund der Eigenschaft 5 ist $S(e_1, e_2)$ mit dem ganzen Raum R^2 identisch. Die APG $S(\mathbf{0}, e_1)$, wo $\mathbf{0}(0,0)$ ist, enthält den Punkt e_2 nicht. Sie ist also von $S(e_1, e_2)$ verschieden. Wir haben zwei verschiedene APG, die dieselben zwei verschiedenen Punkte enthalten.

Aus den obigen Betrachtungen folgt das nachstehende allgemeine Prinzip. Enthält ein Kleinscher Raum wenigstens zwei verschiedene einpunktige transitive Faser $\{a\}$, $\{b\}$ und ein Punkt p, der keine einpunktige transitive Faser darstellt, so gehen wenigstens zwei verschiedene APG durch die Punkte a und b. In der Tat aus der Eigenschaft 2.5 ergibt sich, dass der Punkt b auch zur $S(a,p)$ gehört. Die APG $S(a,b)$ und $S(a,p)$ sind verschieden und die zwei verschiedenen Punkte a und b enthalten. Die gleiche Form hat das fogende von Z. Moszner gegebene Beispiel.

BEISPIEL 2. Es sei $M = \{a\} \cup \{b\} \cup (0,\infty)$, $a \neq b$, $a,b \in R - (0,\infty)$. Mit R_+ wird multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen bezeichnet. Die Abbildung $f: M \times R_+ \longrightarrow M$ definieren wir fogendermassen. $f(a,\alpha) = a$ für $\alpha \in (0,\infty)$, $f(b,\alpha) = b$ für $\alpha \in (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = x\alpha$ für $x \in (0,\infty)$ und $\alpha \in (0,\infty)$. In diesem Beispiel sind a und b die einpunktige transitive Faser. Das Element 1 ist dagegen keine einpunktige transitive Faser. APG $S(a,b)$ und $S(1,b)$ sind verschieden und zwei verschiedene Punkte a und b enthalten.

3. Notwendige Bedingungen für Eindeutigkeit der APG. Aus den obengegebenen Beispielen ergibt sich, dass im Kleinschen Raume zwei verschiedene APG durch zwei verschiedene Punkte durchgehen können. Dies wiederspricht der wohlbekannten und grundlegenden Eigenschaft der Geraden im affinen Raum. Für Geometrie werden nur diese Raume interessant, in denen nur eine APG durch je zwei verschiedene Punkte geht. Zuerst geben wir notwendige Bedingungen dafür. Dann wird gezeigt, dass diese auch hinreichend sind.

HILFSSATZ 1. *Geht in einem Kleinschen Raum* (2.1) *genau eine* APG *durch je zwei verschiedene Punkte, so muss die Implikation*

$$p_2 \in S(p_0,p_1) \Rightarrow p_0 \in S(p_1,p_2) \wedge p_1 \in S(p_0,p_2) \tag{3.1}$$

für je drei verschiedene Punkte p_0, p_1, p_2 *aus* M *gelten.*

Beweis. Für den indirekten Beweis nehmen wir an, dass die Implikation (3.1) nicht gilt. Es gibt also drei verschiedene Punkte p_0, p_1, p_2 aus M derart, dass $p_2 \in S(p_0,p_1)$ und gleichzeitig $p_0 \notin S(p_1,p_2)$. Dann enthalten $S(p_0,p_1)$ und $S(p_1,p_2)$ zwei verschiedene Punkte p_1 und p_2. Sie sind aber verschieden, weil p_0 zur $S(p_0,p_1)$ gehört und zur $S(p_1,p_2)$ nicht. Das aber widerspricht der Voraussetzung. Falls $p_1 \notin S(p_0,p_2)$ ist der Beweis ganz analog.

Im weiteren werden Bedingungen gegeben, die mit der (3.1) äquivalent sind.

Mit Hilfe der Definition der APG (2.2) kann die Implikation (3.1) in der nachstehenden Form dargestellt werden.

$$(3.2)\quad \bigwedge p_0, p_1, p_2 \in M,\ p_0 \neq p_1, p_0 \neq p_2,\ p_1 \neq p_2 \quad H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(p_2)$$
$$\Rightarrow H(p_1) \cap H(p_2) \leqslant H(p_0) \wedge H(p_0) \cap H(p_2) \leqslant H(p_1).$$

Man kann leicht zeigen, dass (3.2) mit der folgenden Bedingung äquivalent ist.

$$(3.3)\quad \bigwedge p_0, p_1, p_2 \in M,\ p_0 \neq p_1,\ p_0 \neq p_2, p_1 \neq p_2,$$
$$H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(p_2) \Rightarrow H(p_0) \cap H(p_1) = H(p_0) \cap H(p_2) =$$
$$= H(p_1) \cap H(p_2) = H(p_0) \cap H(p_1) \cap H(p_2).$$

Zuerst ist es zu bemerken, dass die Äquivalenz

$$A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \cap B \cap C = A \cap B$$

für je drei beliebige Menge A, B, C gilt. Wird diese zu den Untergruppen $H(p_0)$, $H(p_1)$, $H(p_2)$ angewandt, so erhalten wir die Relationen

$$H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(p_2) \Rightarrow H(p_0) \cap H(p_1) \cap H(p_2) = H(p_0) \cap H(p_1),$$

$$(3.4)\quad H(p_0) \cap H(p_2) \leqslant H(p_1) \Rightarrow H(p_0) \cap H(p_1) \cap H(p_2) = H(p_0) \cap H(p_2),$$

$$H(p_1) \cap H(p_2) \leqslant H(p_0) \Rightarrow H(p_0) \cap H(p_1) \cap H(p_2) = H(p_1) \cap H(p_2),$$

Aus (3.4) folgt, dass man äquivalente Relation erhält, wenn wir beliebige Inklusion aus (3.2) durch die entsprechende rechte Seite von (3.4) ersetzen. So wird (3.3) erhalten.

Jetzt geben wir eine Bedingung, die aus (3.3) folgt.

Für je drei Punkte p_0, p_1, b aus M derart, dass $p_0 \neq p_1$, $b \neq p_0$, $b \in S(p_0, p_1)$, gilt die Gleichheit

$$(3.5)\quad S(p_0, b) = S(p_0, p_1).$$

Es wird der folgende Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 2. *Ist die Bedingung* (3.3) *in einem Kleinschen Raume erfüllt, so muss dort auch die Bedingung* (3.5) *erfüllt sein.*

Beweis. Es werden in einem Kleinschen Raum, in dem die Bedingung (3.3) erfullt ist, drei beliebige Punkte p_0, p_1, b ausgewählt derart, dass $p_0 \neq p_1$, $b \neq p_0$ und $b \in S(p_0, p_1)$. Man kann voraussetzen, dass $p_1 \neq b$ auch gilt. Anderfalls ist (3.5) offensichtlich erfüllt. Um die Gleichheit (3.5) zu zeigen, beweisen wir die zwei Inklusionen

$$S(p_0,b) \subset S(p_0,p_1) \tag{3.6}$$

und

$$S(p_0,p_1) \subset S(p_0,b). \tag{3.7}$$

Zuerst wird (3.6) gezeigt. Wir nehmen also ein x aus $S(p_0,b)$ an. Da die Elemente p_0 und b zur $S(p_0,b)$ gehören, genügt es nur den Fall $x \neq p_0$ und $x \neq b$ zu betrachten. Dann ergibt sich

$$H(x) \cap H(p_0) = H(x) \cap H(b) = H(p_0) \cap H(b). \tag{3.8}$$

Aus der Relation $b \in S(p_0,p_1)$ erhalten wir überdies auch aus (3.3) für die Punkte p_0, p_1, b

$$H(b) \cap H(p_0) = H(b) \cap H(p_1) = H(p_0) \cap H(p_1). \tag{3.9}$$

Aus (3.8) und (3.9) folgt, dass alle in diesen Gleichheiten auftretenden Produkte gleich sind, weil dasselbe Produkt $H(p_0) \cap H(p_1)$ dort auftritt. Insbesondere haben wir

$$H(x) \cap H(p_0) = H(p_0) \cap H(p_1),$$

$$H(x) \cap H(p_0) \cap H(p_1) = H(p_0) \cap H(p_1),$$

$$H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(x),$$

d.h. $x \in S(p_0,p_1)$. Ganz analog wird die umgekehrte Inklusion (3.7) gezeigt. Es sei $x \in S(p_0,p_1)$, der von p_0 und p_1 verschieden ist. Auf Grund von (3.3) kann die folgenden Beziehungen für die drei Punkte x, p_0, p_1 geschrieben werden

$$H(x) \cap H(p_0) = H(x) \cap H(p_1) = H(p_0) \cap H(p_1). \tag{3.10}$$

Aus (3.9) und (3.10) folgt die Gleichheit

$$H(x) \cap H(p_0) = H(b) \cap H(p_0).$$

Aus dieser ergibt sich, ganz analog wie vorher,

$$H(p_0) \cap H(b) \leqslant H(x), \text{ d.h. } x \in S(p_0,b).$$

Ist $x = p_0$, so gehört x offensichtlich zur $S(p_0, b)$. Wenn x gleich p_1 ist, so erhalten wir aus (3.9)

$$H(b) \cap H(p_0) = H(p_0) \cap H(p_1) \cap H(b),$$

$$H(b) \cap H(p_0) \leqslant H(p_1), \qquad \text{d.h. } p_1 \in S(p_0, b).$$

Auf diese Weise werden die Inklusionen (3.6) und (3.7), also auch die Gleichheit (3.5) vollständig bewiesen.

4. Hinreichende Bedingungen für Eindeutigkeit der APG. Es sei jetzt vier Punkte a_1, a_2, b_1, b_2 im Kleinschen Raum M gegeben, die den Bedingungen

$$a_1 \neq a_2, \quad b_1 \neq b_2, \quad b_1, b_2 \in S(a_1, a_2), \tag{4.1}$$

genügen. Wir nehmen an, dass diese Punkte die Beziehung

$$S(b_1, b_2) = S(a_1, a_2) \tag{4.2}$$

erfüllen.

HILFSSATZ 3. *Gilt die Relation* (4.2) *für je vier der Eigenschaft* (4.1) *genügene Punkte im Kleinschen Raum, so geht genau eine* APG *durch je zwei verschiedene Punkte.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $S(p_0, p_1)$ und $S(q_1, q_2)$ zwei APG im Kleinschen Raume (2.1), welche die zwei verschiedenen Punkte $a_1 \neq a_2$ enthalten. Wird die Bedingung (4.2) auf die Punkte p_0, p_1, a_1, a_2, und auf die Punkte q_1, q_2, a_1, a_2 angewandt, so erhalten wir $S(a_1, a_2) = S(p_0, p_1)$, $S(a_1, a_2) = S(q_1, q_2)$. Aus diesen ohne weiteres folgt die Gleichheit $S(p_0, p_1) = S(q_1, q_2)$.

Jetzt zeigen wir, dass die Bedingung (4.2) aus derjenigen (3.5) folgt. Dies bedeutet, dass die Bedingung (3.5) auch für die eindeutige Bestimmung der APG durch zwei verschiedene Punkte hinreichend ist.

HILFSSATZ 4. *Aus der Bedingung* (3.5) *folgt die Bedingung* (4.2),

Beweis. Im Kleinschen Raume (2.1), in dem die Bedingung (3.5) für je drei Punkte erfüllt ist, wählen wir vier Punkte a_1, a_2, b_1, b_2, die den Bedingungen (4.1) genügen. Überdies wird es angenommen, dass

$$b_1 \neq a_1 \tag{4.3}$$

ist. Wird (3.7) für die drei Punkte b_1, a_1, a_2 angewandt, so ergibt sich die Gleichheit

$$S(a_1, a_2) = S(a_1, b_1). \tag{4.4}$$

Dann kann (3.5) für die drei Punkte b_2, a_1, b_1 angewandt werden. Daraus folgt

(4.5) $$S(b_1,b_2) = S(b_1,a_1).$$

Aus (4.4) und (4.5) erhält man (4.2).

Ist $a_1 = b_1$, so erfüllen die drei Punkte $a_1 = b_1$, a_2, b_2 die Bedingungen, welche für die Relation (3.5) nötig ist. Diese Relation muss also für die Punkte $a_1 = b_1, a_2, b_2$ gelten, d.h. $S(a_1,b_2) = S(b_1,b_2) = S(a_1,a_2)$. Auf diese Weise ist Hilfssatz 4 vollständig bewiesen.

5. Hireichende und notwendige Bedingungen für Eindeutigkeit der APG. Mit Hilfe der in Paragraphen 3 und 4 durchgeführten Betrachtungen kann die dort erhaltenen Ergebnisse folgendermassen kurz in dem nachstehenden Satz darstellen.

Für bessere Anschauung werden die Nummern der Hilfssätze und Relationen entsprechend verändert.

SATZ 1. *Im Kleinschen Raume, der wenigstens drei verschiedene Punkte enthält, sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(5.1) *Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine* APG.

(5.2) *Für jede drei verschiedene Punkte p_0, p_1, p_2 aus M gilt die Implikation*

$$p_2 \in S(p_0,p_1) \Rightarrow p_0 \in S(p_2,p_1) \wedge p_1 \in S(p_0,p_2).$$

(5.3) *Für jede drei verschiedene Punkte p_0, p_1, p_2 aus M gilt die Implikation*

$$H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(p_2) \Rightarrow H(p_1) \cap H(p_2) \leqslant H(p_0) \wedge H(p_0) \cap H(p_2) \leqslant H(p_1).$$

(5.4) *Für jede drei verschiedene Punkte p_0, p_1, p_2 aus M gilt die Implikation*

$$H(p_0) \cap H(p_1) \leqslant H(p_2) \Rightarrow$$

$$H(p_1) \cap H(p_0) = H(p_0) \cap H(p_2) = H(p_2) \cap H(p_2) = H(p_0) \cap H(p_1) \cap H(p_2).$$

(5.5) *Für jede drei Punkte p_0, p_1, b aus M, die den Bedingungen genügen: $p_0 \neq p_1$, $p_0 \neq b$, $b \in S(p_0,p_1)$ gilt die Gleichheit*

$$S(p_0,b) = S(p_0,p_1).$$

(5.6) *Für jede vier Punkte a_1, a_2, b_1, b_2, welche die Relationen $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$, $b_1, b_2 \in S(a_1,a_2)$ erfüllen, gilt die Geichheit $S(a_1,a_2) = S(b_1,b_2)$.*

B e w e i s. Da die Relation (5.2) mit (3.1) identisch ist, gibt der Hilfssatz 1 die Implikation (5.1) ⇒ (5.2) = (3.1).

Die Implikation (5.2) ⇒ (5.3) = (3.2) erhalten wir ohne weiteres aus der Definition (2.2) der APG.

Da (5.4) mit (3.3) identisch ist, wird die Implikation (5.3) ⇒ (5.4) im § 3 gezeigt.

Da die Relation (5.4) mit (3.3) und die Relation (5.5) mit (3.5) identisch sind, zeigt der Hilfssatz 2, dass die Relation (5.4) diejenige (5.5) nach sich ziecht.

Aus dem Hilfssatz 4 ergibt sich die Implikation (5.5) ⇒ (5.6).

Endlich zeigt Hilfssatz 3, dass (5.6) die Relation (5.1) als Folge hat. So wird der Beweis beendet.

Wir bemerken noch, dass jede Inklusion in den Bedingungen (5.3) und (5.4) durch entsprechende Gleichheit gemäss der Relationen (3.4) ersetzt werden kann.

6. Schlussbemerkungen. Es ist zu bemerken, dass die folgende dreigliedrige Relation $R(p_0,p_1,x) = \{x \in M : x \in S(p_0,p_1)\}$ viele Eigenschaften der im Buche von W. Szmielew [5, S.17] eingeführten Relation hat. Daraus folgt, dass die APG viele Eigenschaften haben, die in diesem Buch für die Geraden auf der affinen Ebene bewiesen worden sind. Es scheint also, dass der in den vorliegenden Betrachtungen eingeführte Name „Affine Pseudogerade" vollständig gerechtfertig ist.

In beliebigem affinem Raume können die APG verschiedene Anzahl der Punkte enthalten. In der Tat hat die APG $S(a,b)$ im Beispiel von Z. Moszner nur zwei Punkte a, b und die andere $S(b, 1)$ enthält unendlich viele Punkte.

Es entsteht jetzt die Frage, um Bedingungen dafür zu finden, daß je zwei APG, dieselbe Anzahl der Punkte haben. Im weiteren wird nur hinreichende Bedingung dafür gegeben. Zu diesem Zweck führen wir zuerst Begriff der Doppeltransitivität bzw. Bitransitivität ein.

DEFINITION 2. Kleinscher Raum wird *doppelt transitiv* genannt, wenn es für jede vier Punkte p_0,p_1, q_0,q_1, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ eine Transformation $f_a : M \to M$, $a \in G$ gibt, derart, dass $f_a(p_0) = q_0$ und $f_a(p_1) = g_1$ gilt.

Jetz kann man leicht die nachstehende Folgerung zeigen.

FOLGERUNG 1. *Im doppelt transitiven Kleinschen Raume, haben je zwei* APG *dieselbe Anzahl der Punkte.*

B e w e i s. Es werden im Raume M zwei APG $S(p_0,p_1)$, $p_0 \neq p_1$ und $S(q_0,q_1)$, $q_0 \neq q_1$ gewählt. Aus der Doppelttransitivität folgt es, dass eine Transformation f_a, $a \in G$, existiert derart, dass $f_a(p_0) = q_0$ und $f_a(p_1) = q_1$ ist. Aus der Eigenschaft (2.8) der APG ergibt sich die Gleichheit $f_a(S(p_0,p_1)) = S(f_a(p_0), f_a(p_1)) = S(q_0,q_1)$. Da die Transformation f_a eine Bijektion ist, müssen Mächtigkeiten $S(p_0,p_1)$ und $S(q_0,q_1)$ gleich sein.

Wir zeigen jetzt, dass Geraden im affinen Kleinschen Raume mit den APG identisch sind, d.h. beweisen wir die Gleichheit

(6.1)
$$L(p_0,p_1) = S(p_0,p_1)$$

für je zwei verschiedene Punkte $p_0 \neq p_1$, p_0,p_1 aus R^n. Die Relation (6.1) wurde schon bei der am Anfang beschriebenen Verallgemeinerung der affinen Geraden ausgenutzt, aber bisher noch nie bewiesen. Nun mit Hilfe hier bewiesenen Eigenschaften wird dieser Beweis viel einfacher sein.

Da die Relation (6.1), gemäss der Eigenschaft (2.8), bei der Transformation f_a, $a \in G$, nicht geändert wird und der affine Kleinsche Raum bitransitiv ist, genügt es (6.1) in einem einfachsten Falle zu überprüfen. Wir wählen als p_0, p_1 die Punkte $\mathbf{0}$ (0,0,...,0) und e_1 (1,0,...,0) = p_1 aus R^n. Dann hat (6.1) die folgende besonders einfache Form

(6.2)
$$L(\mathbf{0},p_1) = \{ x \in R^n \colon x = t.e_1,\ t \in R \} =$$
$$= \{ x \in R^n : H(\mathbf{0}) \cap H(e_1) \leqslant H(x) \} = S(\mathbf{0},p_1).$$

Zuerst wird die Untergruppe $H(\mathbf{0}) \cap H(e_1)$ bestimmt. Es ist $H(\mathbf{0}) = \{ (\mathbf{0}, A) : A \in Gl(n,R) \}$, $H(\mathbf{0}) \cap H(e_1) = \{ (\mathbf{0},A) : A.e_1 = e_1,\ A \in Gl(n,R) \} = \{ (\mathbf{0},A_0) \in GA(n,R) \}$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1, & a_2^1,\ldots, & a_n^1 \\ 0, & a_2^2,\ldots, & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & a_n^2,\ldots, & a_n^n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_2^2\ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n^2\ldots & a_n^n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wenn x zur $L(\mathbf{0},p_1)$ gehört, so ist $x = te_1$. Da $(\mathbf{0},A_0)$, $et = \mathbf{0} + A_0.et = et$ gleich ist, gehört Element $(\mathbf{0},A_0)$ zur $H(x)$, also $x \in S(\mathbf{0},p_1)$. Daraus ergibt sich die Inklusion $L(\mathbf{0},p_1) \subset S(\mathbf{0},p_1)$.

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, wird ein Element x aus $S(0,p_1)$ gewählt. Dann gilt die Inklusion $H(0) \cap H(e_1) = \{ (0,A_0) \} \leqslant H(x)$. Für jede Matrix A_0 haben wir die Gleichheit $A_0.x = x$, die in den Koordinaten die Form $a_j^i.x^j = x^i$, $i,j = 1,\ldots, n$ hat. Insbesondere erhält man daraus für $i = 1$

$$a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 + \ldots + a_n^1 x^n = 0.$$

Da aber alle Elemente a_j^1, $j = 2,\ldots,n$ ganz beliebig sind, müssen alle Elemente x^j, $j = 2,\ldots,n$ gleich Null sein. Das Element x hat die Form $x = (x^1,\ 0,\ldots,0) = x^1.e^1$ und gehört es zur $L(0,p_1)$. So ist der Beweis beendet.

Der n-dimensionale affine Raum erfüllt die Bedingungen (5.1)—(5.6), weil die Geraden $L(p_0,p_1) = S(p_0,p_1)$ in diesem Raume durch zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt sind.

Im Zusammenhang mit den obendurchgeführten Betrachtungen entstehen die folgenden bisher offenen Fragen.

1. Alle Kleinschen Räume zu bestimmen, welche die Eigenschaften (5.1)—(5.6) haben. Dafür genügt es, solche Gruppen und solche Wirkungen dieser Gruppen auf M zu finden, welche den Bedingungen (5.3) bzw. (5.4) genügen.

2. Die Geraden in anderen Kleinschen Räumen z. B. in Vektor-, Projektiven-, Pseudoeuklidischen- Grassmannschenräumen u.s.w. zu charakterisieren.

3. Die k-dimensionalen Hiperebenen im n-dimensionalen affinen Räume zu charakterisieren.

LITERATUR

[1] K. DĘBOWSKI, *Desargues Theorems in Some Klein's Space,* Demonstratio Math. 17 (1984), 565—580.

[2] K. DĘBOWSKI, *Skończenie generowane przestrzenie Kleina dopuszczające regularne podprzestrzenie,* (Doctoral Thesis), Uniwersytet Śląski, Katowice 1985.

[3] M. KUCHARZEWSKI, *Własności przestrzeni Kleina,* I, Pol. Śląska, Gliwice 1985, skrypt Nr 1209; *Własności przestrzeni Kleina,* II, Pol. Śląska, Gliwice 1986, skrypt Nr 1295.

[4] M. KUCHARZEWSKI, *Über die grundlegenden Begriffe der Kleinschen Räume,* Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej Nr 853, ser. Mat.-Fiz. 48 (1986), 99—110.

[5] W. SZMIELEW, *Od geometrii afinicznej do euklidesowej,* PWN, Warszawa, 1981.